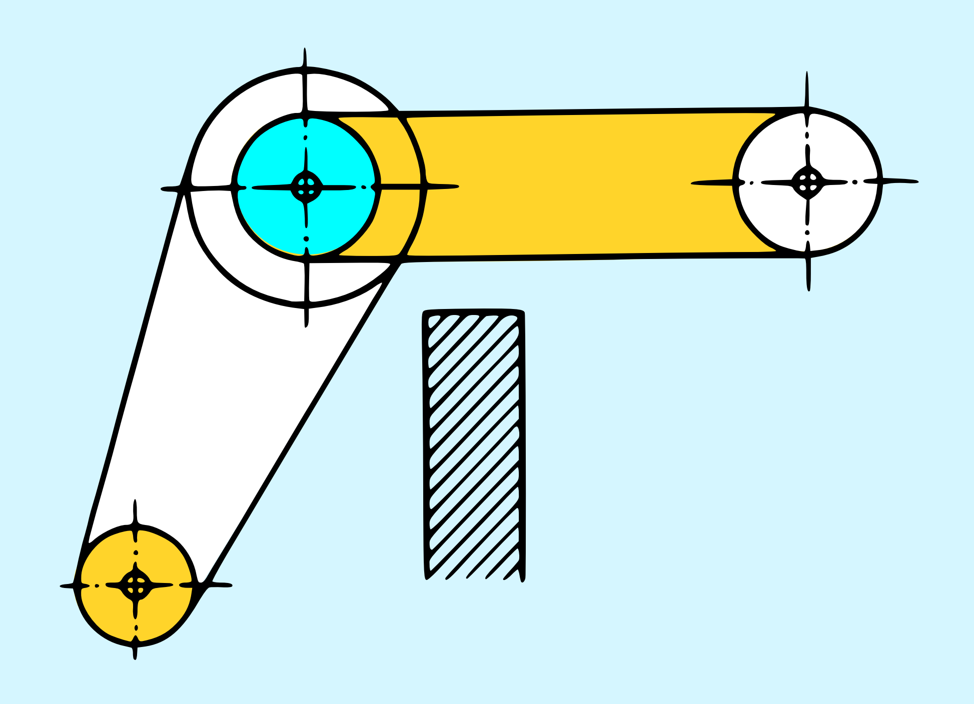
V. Zinoviev

THÉORIE DES MÉCANISMES ET DES MACHINES



Éditions Mir Moscou

Вл. А. Зиновьев

Теория механизмов и машин

(На французском языке)

V. ZINOVIEV

THÉORIE DES MÉCANISMES et DES MACHINES

ÉDITIONS DE LA PAIX
MOSCOU

Traduit du russe par Damcdian

A NOS LECTEURS

Les Editions de la Paix vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute suggestion que vous voudriez formuler.

Ecrire à l'adresse: 1er Rijski péréoulok, 2, Moscou, I—278, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

INTRODUCTION

Les divers mécanismes conçus par l'homme, dans des buts variés, peuvent être divisés en deux groupes importants. On range dans le premier groupe les mécanismes dont les pièces n'ont pas la possibilité d'accomplir des mouvements l'une par rapport à l'autre, si on néglige les mouvements insignifiants dus aux déformations engendrées par l'action des forces; on attribue au second groupe les mécanismes dont les pièces se trouvent en mouvement l'une par rapport à l'autre, quand le mécanisme remplit son objectif. Les mécanismes du premier groupe sont des constructions d'affectation très variée: édifices, ponts, réservoirs pour liquides ou gaz, etc.

La théorie des mécanismes et des machines a pour objet l'étude des mécanismes du second groupe. Parmi ces nombreux mécanismes on peut indiquer les principaux types suivants, très répandus et d'une grande importance pour la technique moderne:

1) les moteurs affectés à transformer les différentes formes de l'énergie en énergie mécanique (machines à vapeur, turbines à vapeur et turbines hydrauliques, moteurs à combustion interne, moteurs électriques, etc.);

2) les générateurs d'énergie électrique transformant l'énergie mécanique en énergie électrique;

3) les machines-instruments accomplissant divers aspects de travail, telles que les machines-outils pour l'usinage des métaux et du bois, les machines agricoles, les métiers à filer et à tisser, les machines à coudre, les brasseurs mécaniques des appareils chimiques, les centrifuges, etc.;

4) les machines de transport servant à déplacer des matériaux solides, liquides ou gazeux;

5) les instruments de désignation variée tels que les horloges, les machines à calculer, etc.

La machine accomplit un travail par l'intermédiaire de son organe de travail. Ainsi, pour la machine-outil qui usine les métaux ou le bois, l'organe de travail est la lame qui découpe les copeaux dans le matériau à usiner, l'aiguille—pour la machine à coudre, le crochet auquel on suspend la charge à soulever—pour l'appareil de levage, etc.

La machine est apte à produire un travail seulement dans le cas où elle est mise en mouvement par les forces extérieures telles que la vapeur, le gaz, l'énergie électrique, l'eau, etc. C'est pourquoi, l'un des organes indispensables à toute machine est l'organe d'assimilation du travail des forces extérieures.

Dans un moteur à piston (machine à vapeur ou moteur à combustion interne), cet organe est le piston, pour un tour — la poupée, pour une bicyclette — la pédale, etc.

Les problèmes relatifs aux formes, aux dimensions des organes de travail et des organes d'assimilation du travail des forces extérieures, à la nature des mouvements les mieux indiqués et des forces agissant sur ces organes sont l'objet non pas de la théorie des mécanismes et des machines, mais des disciplines spéciales étudiant les cycles énergétique et technologique.

La théorie des mécanismes et des machines étudie les questions concernant le projet et l'étude des mécanismes constitués de pièces mobiles qui relient les organes d'assimilation du travail des forces extérieures aux organes de travail.

L'étude des problèmes concernant la transmission du travail et des mouvements n'impose pas la connaissance des formes constructives et des dimensions de toutes les pièces de la machine, se limitant simplement au schéma dit cinématique (ossature de la machine). Les méthodes d'élaboration et d'étude des schémas cinématiques sont exposées dans le cours *Théorie des mécanismes et des machines*.

Une fois l'étude du schéma cinématique terminée, on fait le choix des formes et des dimensions approchées de toutes les pièces de la machine, puis on procède à l'étude dynamique afin de déterminer les données nécessaires à la précision des calculs préliminaires. Les méthodes de l'étude dynamique des machines sont également exposées dans la théorie des mécanismes et des machines.

Ainsi, tout en étant adjacente aux disciplines des cycles énergétique et technologique et en se basant sur les données de la mécanique théorique, la théorie des mécanismes et des machines se classe parmi les disciplines scientifiques qui traitent les méthodes de détermination des formes constructives et des dimensions des pièces de machines.

CHAPITRE I

ANALYSE DE LA STRUCTURE DES MÉCANISMES PLANS

1. COUPLE CINÉMATIQUE

Le mouvement est un des critères de la machine qui la différencie des constructions qui, en remplissant leur objectif, ne sont pas en mouvement.

Un outil, guidé par la main de l'homme, tel qu'une aiguille, une hache, un marteau, un tournevis, en accomplissant sa fonction, se trouve aussi en mouvement. La machine se distingue de l'instrument qui accomplit des mouvements variés par les mouvements déterminés de ses pièces; l'aiguille pour la couturière,

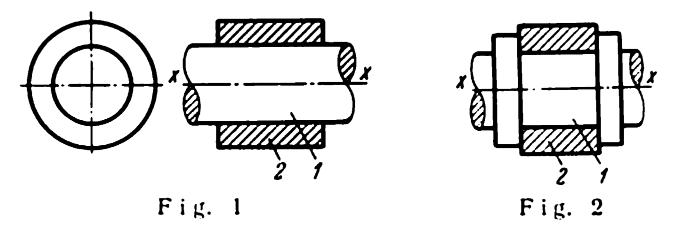


Fig. 1   Fig. 2

le marteau pour le forgeron accomplissent différents mouvements, mais l'aiguille de la machine à coudre ou le marteau pneumatique n'exécutent que des mouvements bien déterminés.

On ne peut imprimer à un corps quelconque un mouvement déterminé qu'en limitant sa mobilité par d'autres corps. Par exemple, une barre cylindrique ne satisfaisant à aucune liaison peut accomplir des mouvements variés, mais si on la place dans un cylindre évidé, comme le montre la fig. 1, alors la barre 1, par rapport au cylindre évidé 2, peut seulement être animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe commun $x-x$ des deux cylindres et se déplacer dans la direction qui coïncide avec leur axe commun $x-x$. Si cette même barre cylindrique, placée dans le cylindre évidé, est munie d'épaulements (fig. 2) fixés sur les

surfaces de base du cylindre évidé, alors la barre 1, par rapport au cylindre évidé 2, peut seulement être animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe commun $x—x$ des deux cylindres. Si au lieu d'une barre cylindrique, on considère une barre prismatique et si on l'engage dans un prisme évidé (fig. 3), alors la barre 1 ne pourra accomplir, par rapport au prisme évidé 2, qu'un mouvement rectiligne suivant l'axe $x — x$.

Puisque le mouvement d'un corps quelconque ne peut être déterminé que par la limitation de sa mobilité par d'autres corps, il faut donc, pour l'étude du mouvement d'une pièce de machine quelconque, considérer cette pièce en relation avec une autre pièce limitant plus ou moins sa mobilité. Dans les cas où le mouvement de la pièce de machine qui nous intéresse est limité non par une, mais par deux ou plusieurs pièces, nous aurons une représentation complète du mouvement possible de la pièce considérée, si on prend en considération les limitations imposées à sa mobilité par toutes les autres pièces de la machine avec lesquelles elle se trouve en contact. En d'autres termes, lorsqu'on considère une machine du point de vue cinématique, on a une représentation complète des mouvements possibles de toutes ses pièces en considérant non pas chaque pièce séparément, mais en concentrant l'attention sur les couples d'éléments qui limitent mutuellement le mouvement d'un élément par rapport à l'autre, c'est-à-dire les couples d'éléments cinématiques.

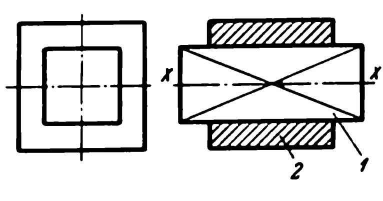


Fig. 3

On appelle **couple cinématique** tout assemblage mobile de deux corps solides en contact.

Les corps constituant le couple s'appellent **chaînons**.

Il découle de cette définition qu'un couple d'éléments cinématiques ne peut pas être constitué de corps n'étant pas en contact ou bien de corps qui, se trouvant en contact, ne peuvent pas être en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Le degré de limitation de la liberté de mouvement d'un chaînon d'un couple cinématique par rapport à un autre chaînon dépend seulement des formes géométriques et des aires en contact des chaînons appelés **éléments du couple cinématique**: ni la matière avec laquelle est constitué le chaînon, ni la forme de la partie non en contact avec l'autre chaînon ne peuvent imposer des restrictions à la mobilité d'un autre chaînon. C'est pour cette raison-là que la théorie des mécanismes et des machines ne les prend pas en considération.

2. CLASSIFICATION DES COUPLES CINÉMATIQUES

Les couples cinématiques peuvent être classés suivant différents critériums. Nous nous bornerons à la classification qui dépend uniquement du caractère de contact des chaînons. D'après ce critère, il faut distinguer les couples inférieurs et les couples supérieurs.

On appelle couple inférieur tout couple dont les chaînons sont en contact superficiel et couple supérieur tout couple dont les chaînons sont en contact linéaire ou ponctuel.

Des exemples de couples inférieurs sont donnés sur les fig. 1, 2 et 3. Un exemple de couple supérieur, dont les chaînons sont en contact linéaire suivant une droite, est celui de tout cylindre posé sur un plan; suivant une circonférence—celui de toute boule placée dans un cylindre évidé dont le diamètre est égal à celui de la boule; en contact ponctuel—celui de toute boule posée sur un plan.

Les couples inférieurs ont un grand avantage par rapport aux couples supérieurs: dans les couples inférieurs, pour des réactions égales dans les couples, pour des coefficients de frottement identiques et pour certaines autres conditions égales, l'usure des chaînons aux contacts s'effectue plus lentement que dans les couples supérieurs. Cependant, les couples supérieurs permettent d'effectuer des mouvements qu'il serait difficile de réaliser à l'aide de seuls couples inférieurs.

Si tous les points d'un chaînon d'un couple inférieur ne peuvent se déplacer par rapport à un autre chaînon que d'un mouvement rectiligne, comme par exemple dans le couple cinématique représenté sur la fig. 3, ce couple cinématique s'appelle couple de translation. Si tous les points des deux chaînons d'un couple inférieur ne peuvent être animés que d'un mouvement de rotation autour de l'axe géométrique de la surface de contact des chaînons, comme dans l'exemple du couple indiqué sur la fig. 2, ce couple cinématique s'appelle alors couple de rotation.

3. REPRÉSENTATIONS SCHÉMATIQUES DES COUPLES CINÉMATIQUES

On a indiqué sur les fig. 4—12 le mode de représentation des couples cinématiques de divers types admis sur les schémas cinématiques.

La fig. 4 représente un couple de rotation dont les chaînons peuvent se déplacer librement sur le plan. On indique schématiquement par un cercle reliant les chaînons 1 et 2 le mouvement de rotation d'un chaînon par rapport à un autre autour de l'axe

géométrique du couple. Dans une construction encore plus simple, on peut se représenter le couple de rotation sous forme d'un axe cylindrique avec un tambour tournant sur l'axe. Les formes constructives des chaînons peuvent être très variées.

Dans les couples de tous types, l'immobilité des chaînons est indiquée sur les schémas par des hachures. Sur les fig. 5 et 6, on

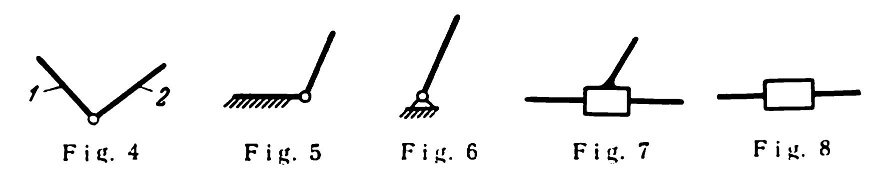


Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7 Fig. 8

donne la représentation schématique d'un couple de rotation avec un chaînon fixe.

Sur les fig. 7 et 8, on donne les représentations schématiques d'un couple de translation à chaînons libres et sur les fig. 9 et 10*a* et *b*, à un chaînon fixe.

On a représenté schématiquement sur les fig. 11 et 12 des couples supérieurs à chaînons libres et à un chaînon fixe. Les

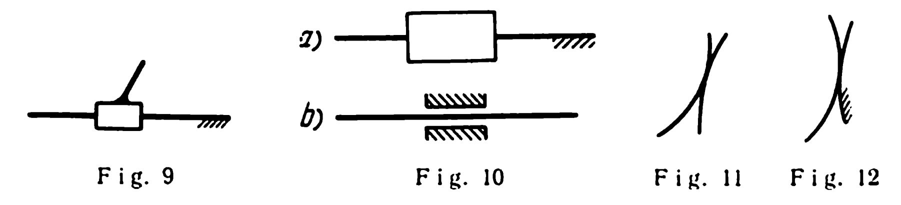


Fig. 9 Fig. 10 Fig. 11 Fig. 12

profils curvilignes indiquent schématiquement que le contact des chaînons se fait suivant une courbe (perpendiculaire au plan de la figure) ou suivant un point.

En ce qui concerne les représentations schématiques des couples cinématiques, il faut toujours avoir en vue qu'elles ne donnent aucune indication sur les formes constructives.

4. CHAÎNE CINÉMATIQUE

On appelle chaîne cinématique tout système de chaînons en liaison dans les couples cinématiques.

D'après la nature du mouvement des points de chaînons, les chaînes cinématiques se divisent en chaînes planes et en chaînes gauches ou spatiales. On appelle chaînes planes les chaînes

dont les chaînons sont animés d'un mouvement d'un plan sur un plan. Les **chaînes gauches** sont celles dont les points des chaînons sont animés de mouvements soit suivant des courbes gauches, soit suivant des courbes planes qui se trouvent dans des plans non parallèles.

Les chaînes cinématiques peuvent être fermées ou ouvertes. Une chaîne cinématique est dite **fermée** si chaque chaînon forme des couples cinématiques avec les chaînons successifs, la chaîne est dite **ouverte** si elle contient des chaînons appartenant à un seul couple cinématique.

5. SCHEMAS CINEMATIQUES

L'étude cinématique d'un mécanisme quelconque (moteur, machine-outil, etc.), à l'état de projet ou en construction, est effectuée d'après son schéma cinématique. Pour l'étude cinématique, il faut définir les chemins parcourus, les vitesses, les accélérations des points des éléments en mouvement. On ne doit indiquer sur le schéma cinématique que ce qui est nécessaire à l'étude entreprise et, pour cette raison, toutes les pièces du mécanisme à étudier seront représentées sur le schéma ainsi que les chaînons de couples cinématiques.

Expliquons sur un exemple comment on passe du schéma de construction d'un mécanisme à son schéma cinématique.

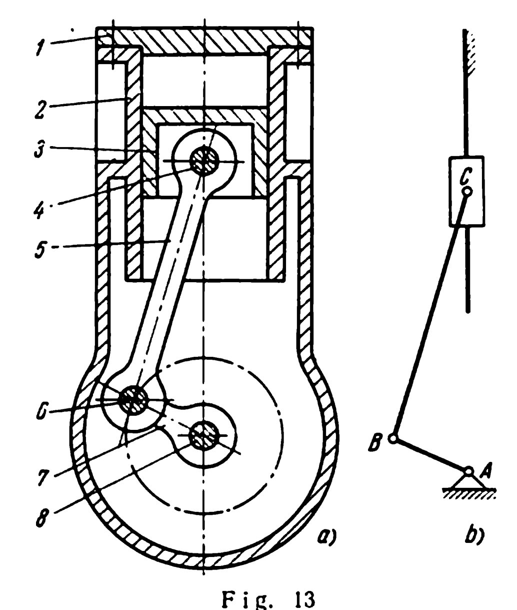


Fig. 13

On donne sur la fig. 13*a* le schéma de construction et sur la fig. 13*b*, le schéma cinématique d'un moteur à combustion interne. Un moteur à combustion interne transforme l'énergie chimique du carburant (naphte, pétrole, essence, gaz combustible, etc.) en énergie mécanique. Quand un moteur fonctionne, le piston *3* (fig. 13*a*) est animé d'un mouvement alternatif (de va-et-vient) dans le cylindre *2*.

Les nombreuses pièces du moteur qui n'influent pas sur la cinématique du mécanisme ne sont pas représentées sur le schéma de construction.

L'axe *4* est fixé dans le piston *3* et retient la bielle *5*. L'autre extrémité de la bielle est fixée à l'axe *6* qui est lié à son tour à la pièce *7* appelée manivelle. La manivelle est fixée rigidement à l'arbre *8* animé d'un mouvement de rotation dans des paliers fixes. Pour la représentation constructive, l'arbre *8*, la manivelle *7* et l'axe *6* sont toujours exécutés en un bloc appelé vilebrequin. Sur la fig. 13*a*, ils sont représentés séparément afin de suivre aisément la description qui va suivre.

Le cylindre est la partie immobile du moteur qui se trouve en contact avec la culasse et le piston. La culasse est rigidement liée au cylindre, c'est pourquoi elle ne constitue pas un couple cinématique; pour certaines raisons technologiques on doit la fabriquer séparément du cylindre. Le piston peut être en mouvement par rapport au cylindre et c'est pour cela que l'ensemble piston-cylindre forme les chaînons du couple cinématique. C'est un couple inférieur parce que les chaînons sont en contact superficiel. C'est un couple de translation puisque le mouvement de rotation du piston dans le cylindre est impossible, car avec le piston, l'axe *4*, en liaison avec ce dernier, serait animé d'un mouvement de rotation, ainsi que la bielle et toutes les autres pièces du moteur y compris le bâti avec le cylindre.

Le piston *3* est un chaînon mobile du couple de translation; le cylindre *2* est un chaînon immobile guidant le mouvement du chaînon mobile. Sur le schéma cinématique, le cylindre est représenté par un segment de droite hachuré symbolisant l'immobilité du chaînon, le piston est représenté sous forme de curseur comme il est admis de représenter tout chaînon mobile d'un couple de translation.

L'arbre *8* est fixé rigidement à la pièce *7* et, par conséquent, cet ensemble ne constitue pas un couple cinématique, mais forme avec cette pièce un des chaînons mobiles. L'arbre *8* est animé d'un mouvement de rotation dans le palier cylindrique fixe non représenté sur la fig. 13*a* en constituant avec ce palier le couple de rotation *A*.

En réalité, l'arbre repose non pas sur un seul support, mais sur deux ou plusieurs et dans ce dernier cas, tous ces supports appartiennent à un même chaînon fixe.

Sur le schéma de construction l'axe géométrique de l'arbre *8* perpendiculaire au plan du croquis coupe le prolongement de l'axe géométrique, commun au cylindre et au piston, sous un angle droit. C'est pourquoi sur le schéma cinématique le centre de rotation du couple *A* doit se trouver sur le prolongement de

la droite constituant le chaînon fixe du couple de translation.

La pièce *7* constitue avec la pièce *5* un couple de rotation. Sur le schéma cinématique, ce couple est indiqué par la lettre *B*. Sur le schéma de construction, la distance entre les axes géométriques des pièces *6* et *8* est déterminée et ne varie pas; sur le schéma cinématique, pour l'échelle considérée, on doit conserver cette même distance pour les centres des cercles qui représentent les couples *A* et *B*. Ainsi, sur le schéma cinématique, le vilebrequin du moteur est représenté par le chaînon *AB*.

Sur le schéma de construction, la pièce *5* (bielle) forme un couple de rotation avec le piston *3* et la pièce *7*. Sur le schéma cinématique, la bielle est représentée par le chaînon *BC*. La distance entre les centres de rotation des couples *B* et *C*, pour l'échelle considérée sur le schéma cinématique, doit être égale à la distance entre les axes de ces couples du schéma de construction.

Le schéma cinématique du moteur donné sur la fig. 13 *b* représente une chaîne cinématique fermée à un chaînon fixe, trois chaînons mobiles, un couple de translation et trois couples de rotation.

6. DEGRÉS DE LIBERTÉ DES CHAÎNES CINÉMATIQUES PLANES

La position du chaînon *AB* (fig. 14) sur le plan est définie par trois paramètres: les deux coordonnées d'un point quelconque du chaînon et l'angle formé par le chaînon avec un des axes de coordonnées. En faisant varier les trois paramètres, le chaînon libre du plan jouit de trois degrés de liberté; de plus, pour aboutir à une position donnée d'avance, on peut utiliser les degrés de liberté indépendamment de l'ordre dans lequel on les choisit.

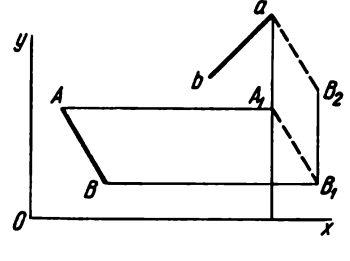


Fig. 14

En utilisant successivement les trois degrés de liberté, pour un mouvement d'un plan sur un plan, le chaînon peut passer de la position *AB* à une autre position donnée *ab* de la manière suivante:

1) on le déplace parallèlement à lui-même dans la direction parallèle à l'axe des *x* jusqu'à ce que le point *A* coïncide avec la perpendiculaire à l'axe des *x* abaissée du point *a*; par ce déplacement, le chaînon *AB* occupe la position A_1B_1;

2) de la position A_1B_1, on le déplace parallèlement à lui-même dans la direction parallèle à l'axe des y jusqu'à ce que le point A_1 coïncide avec le point a; ce déplacement a pour résultat de faire passer le chaînon de la position A_1B_1 à la position aB_2;

3) faire tourner le chaînon autour du point a de manière à ce que le point B_2 coïncide avec le point b.

Deux chaînons qui ne sont pas en liaison jouissent de six degrés de liberté dans un mouvement d'un plan sur un plan pour pouvoir être amenés à coïncidence quand ces chaînons occupent deux positions quelconques préalablement données. Deux chaînons formant un couple cinématique en mouvement d'un plan sur un plan, c'est-à-dire conservant leur position relative, jouissent seulement de trois degrés de liberté comme dans le cas d'un chaînon. Mais dans un couple cinématique, les chaînons peuvent toujours être animés de mouvements relatifs. Les chaînons d'un couple de rotation jouissent d'un degré de liberté supplémentaire permettant la rotation d'un des chaînons autour du centre du couple, tandis que les chaînons du couple de translation ont la possibilité de glisser l'un sur l'autre. Contrairement aux chaînons des couples inférieurs, les chaînons des couples supérieurs pour un déplacement relatif peuvent jouir de deux degrés de liberté, un de glissement et l'autre de roulement d'un chaînon sur l'autre.

Par conséquent, le couple inférieur retranche deux degrés de liberté aux deux chaînons, ou comme il est admis encore de dire impose deux liaisons; le couple supérieur impose une liaison.

Toute chaîne cinématique appartenant à une machine doit être fixée rigidement au bâti de la machine par l'un de ses chaînons. Pour un chaînon fixe, appelé support, la formule de la structure d'une chaîne cinématique plane est de la forme

$$3n - 2p - k = W, \tag{1}$$

où n est le nombre des chaînons mobiles ou le nombre de tous les chaînons excepté celui qui tient le rôle de support;

p le nombre de couples inférieurs;

k le nombre de couples supérieurs;

W le nombre de degrés de liberté ou encore le nombre des paramètres indépendants.

Le nombre de degrés de liberté d'une chaîne cinématique par rapport à un chaînon fixe, contrairement au nombre de degrés de liberté de cette chaîne, sans prendre en considération les chaînons fixes, s'appelle degré de mobilité de la chaîne cinématique. Dans la suite, nous n'aurons pas à considérer des chaînes cinématiques démunies de chaînons fixes.

Pour établir la formule (1), on suppose que chaque chaînon introduit dans la chaîne cinématique trois degrés de liberté et que chaque couple inférieur en supprime deux. Mais on peut se représenter une chaîne cinématique exempte de couples supérieurs dont tous les chaînons sont privés de mouvement de rotation, c'est-à-dire que les paramètres angulaires sont invariables. Telles sont les chaînes qui ne contiennent que des couples de translation.

Le chaînon de telles chaînes introduit non pas trois, mais deux degrés de liberté, et le couple cinématique inférieur (dans le cas considéré, il est toujours de translation) impose non pas deux, mais une liaison.

Donc, pour déterminer le nombre de degrés de liberté d'une chaîne cinématique ne contenant que des couples de translation, il faut partir de la formule

$$W = 2n - p, \tag{2}$$

où W est le nombre de degrés de liberté;

n le nombre de chaînons mobiles;

p le nombre de couples de translation.

Les chaînes cinématiques ne contenant que des couples de translation n'ont des applications pratiques que dans des cas très restreints.

Le nombre de degrés de mobilité, égal au nombre des paramètres indépendants, caractérise la mobilité de la chaîne cinématique. Lorsque le nombre de degrés de mobilité est nul, tous les chaînons ne peuvent occuper qu'une seule position déterminée et ne peuvent la quitter vu le manque de paramètres indépendants, c'est-à-dire à cause de l'impossibilité de mettre en mouvement un chaînon quelconque. Pour W degrés de mobilité, une configuration réciproque déterminée de tous les chaînons est obtenue après les déplacements de un ou de plusieurs chaînons utilisant tous les W paramètres indépendants. Pendant le mouvement d'un nombre quelconque de chaînons se déplaçant suivant des lois données et utilisant tous les paramètres indépendants, les chaînons restants seront animés d'un mouvement parfaitement déterminé.

Les chaînons dont les lois de mouvement sont supposées données au cours de l'étude de la chaîne s'appellent m e n a n t s; les chaînons restants s'appellent m e n é s. Il ne faut pas confondre les chaînons menants avec ceux qui sont mis en mouvement par des forces extérieures. Ces chaînons, pour les distinguer des chaînons menants, seront appelés chaînons moteurs. Le chaînon menant peut être moteur mais aussi peut ne pas l'être.

Pour mieux comprendre ce qui vient d'être exposé examinons quelques exemples.

Sur la fig. 15, on donne le schéma d'une chaîne à trois chaînons dont l'un (support) AC est immobile et trois couples de rotation A, B, C. Pour $n=2$, $p=3$ et $k=0$, le nombre de degrés de mobilité d'après la formule (1) est

$$3\cdot2-2\cdot3-0=0.$$

Par conséquent, il n'y a pas de paramètre indépendant et donc la chaîne est fixe, ce qui d'ailleurs est évident.

En remplaçant dans la chaîne cinématique (fig. 15) le couple de rotation B par un couple supérieur, on obtient la chaîne donnée à la fig. 16. Le couple supérieur permet aux trois chaînons de changer leur position l'un par rapport à l'autre et c'est pourquoi la rotation d'un des chaînons d'un angle quelconque en conservant le contact dans le couple B est possible. Mais quand le chaînon ayant subi une rotation aura pris une position déterminée, l'autre ne pourra plus tourner: sa rotation dans une direction sera empêchée par le premier chaînon, tandis que la rotation dans le sens opposé avec cessation de contact avec le premier chaînon fera disparaître le couple supérieur et transformera la chaîne cinématique fermée en chaîne ouverte. Par conséquent, le nombre de degrés de mobilité de la chaîne est égal à un, ce qui découle de la formule (1):

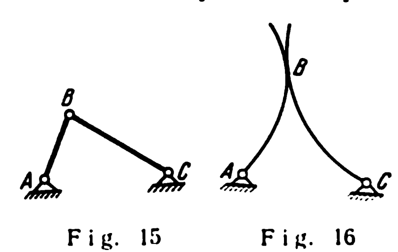


Fig. 15 Fig. 16

$$3\cdot2-2\cdot2-1=1.$$

Sur la fig. 17, on donne une chaîne à trois chaînons mobiles et à quatre couples de rotation. D'après la formule (1), on a

$$3\cdot3-2\cdot4-0=1.$$

Pour une rotation d'angle quelconque du chaînon AB, tous les chaînons prennent une position déterminée puisque le mouvement de l'un des chaînons restant est impossible sans changer une seconde fois la position du point B. On a un résultat semblable si on considère le chaînon CD à un paramètre indépendant. Il en découle que le chaînon BC peut faire changer librement la position de l'une de ses extrémités seulement, tandis que la position de l'autre extrémité dépend entièrement de celle de la première.

Par conséquent, le résultat obtenu ci-dessus d'après la formule (1) est exact.

Sur la fig. 18, on a représenté une chaîne à quatre chaînons mobiles et à cinq couples de rotation. D'après la formule (1), on a:

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 0 = 2.$$

Pour une rotation du chaînon AB, on utilise un degré de mobilité et on détermine la longueur du côté imaginaire BE du quadrilatère $BCDE$. Quand les points B et E sont immobiles, les chaînons de la chaîne $BCDE$ disposent d'un degré de mobilité, ce qui a déjà été établi dans le cas de la chaîne représentée sur la fig. 17. On arrive à un résultat semblable si, au lieu de prendre le chaînon AB, on fait tourner le chaînon DE. Par conséquent,

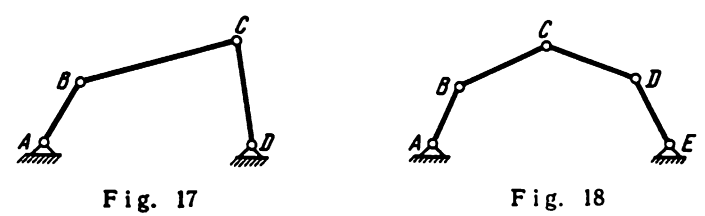


Fig. 17 Fig. 18

la chaîne représentée sur la fig. 18 dispose de deux degrés de mobilité, ce qui confirme l'exactitude du résultat obtenu à l'aide de la formule (1).

Dans cette chaîne, chacun des chaînons AB et DE ne peut utiliser qu'un seul paramètre indépendant, tandis que chacun des chaînons BC et CD, en passant à une autre position, peut utiliser deux paramètres indépendants. Ainsi, le chaînon BC, en faisant changer la position du point B, utilise un paramètre indépendant, le point B se déplaçant suivant une circonférence de rayon AB peut faire varier arbitrairement une seule coordonnée; après que le point B ait occupé une nouvelle position, le point C se déplaçant sur la circonférence de rayon BC peut également faire varier arbitrairement une de ces coordonnées.

Ainsi, tous les chaînons de la chaîne représentée (fig. 18) se déplacent de manière bien déterminée aussi bien pour les deux chaînons menants AB et DE que pour un chaînon menant BC ou CD.

Ainsi, après avoir déterminé le nombre de degrés de mobilité d'une chaîne cinématique plane, nous pouvons résoudre le problème relatif au nombre de chaînons menants différemment en fonction du nombre de degrés de mobilité dont disposent les chaînons choisis comme menants. En pratique, on peut toujours prendre comme menants les chaînons à un degré de mobilité. Ainsi le nombre de degrés de mobilité d'une chaîne cinématique plane peut être pris égal au nombre possible de chaînons menants de

cette chaîne. En outre, un des chaînons de la chaîne cinématique est pris pour support et tous les autres sont en mouvement suivant des lois bien déterminées.

La formule (1) permet même pour une chaîne compliquée de résoudre rapidement la question relative au nombre de chaînons menants, nécessaire pour que le mouvement de tous les chaînons menés soit déterminé.

7. MÉCANISME ET MACHINE

On appelle mécanisme tout système de chaînons en liaison réciproque destinés à accomplir des mouvements prédéterminés.

On appelle machine tout mécanisme ou tout complexe de mécanismes destinés à accomplir un travail utile, lié à un processus de production, à la transformation de l'énergie, au transport.

La liaison entre les chaînons est réalisée, comme nous le savons, à l'aide d'assemblages en couples cinématiques. Dans le type le plus simple, un mécanisme quelconque peut être constitué par un système de deux chaînons en liaison formant un couple cinématique dont l'un, mobile, peut accomplir un mouvement déterminé et l'autre, fixe, est nommé support. Un mécanisme plus complexe à un chaînon fixe possédant plusieurs chaînons mobiles réunis en couples cinématiques est donné par une chaîne cinématique fermée. Tous les chaînons d'une telle chaîne peuvent être mis en mouvement quand un ou plusieurs chaînons, appelés menants, sont en mouvement suivant des lois données. Le nombre nécessaire de chaînons menants pour un mouvement déterminé et le nombre de chaînons menés peuvent être calculés d'après la formule (1) de structure des mécanismes plans appelée formule de Tchébychev. Découverte pour la première fois par l'académicien P. Tchébychev en 1869 pour les mécanismes à couples de rotation seulement, elle a été par la suite généralisée aux mécanismes constitués de couples supérieurs en plus des couples inférieurs des deux types.

Dans la majorité des cas, on a affaire à des mécanismes ne comportant qu'un seul chaînon menant ; dans la suite, nous ne considérerons que de tels mécanismes. Pour ces mécanismes, la formule de Tchébychev est

$$3n-2p-k=1. \qquad (3)$$

Etant donné que la formule (1) n'a été établie que pour les chaînes cinématiques planes, la formule (1) et la formule (3) qui en découle ne se généralisent pas aux chaînes cinématiques gauches ou spatiales.

8. CLASSIFICATION DES MÉCANISMES

Dès la fin du XVIIIe siècle, les savants ont proposé différents systèmes de classification des mécanismes. Mais aucun d'entre eux n'a exercé une influence tant soit peu significative sur le développement de la science des mécanismes. On a proposé des systèmes de classification basés sur le groupement des mécanismes d'après le critère de transformation des mouvements (par exemple, transformation du mouvement rectiligne en mouvement curviligne, du mouvement continu en mouvement périodique), d'après le critère de transformation des vitesses, d'après la nature des liaisons entre les chaînons des mécanismes, etc. Ces classifications n'excluent pas la possibilité d'inclure dans un même groupe des mécanismes complètement dissemblables par leur structure et qui, par conséquent, ne peuvent être étudiés simultanément.

En 1916, L. Assour, professeur à l'Institut polytechnique de Pétersbourg, a proposé une classification qui eut une heureuse influence sur le développement de la science des mécanismes. Cette classification ne groupait que les mécanismes constitués par des couples inférieurs, mais par la suite, grâce aux travaux des savants soviétiques, la classification d'Assour a été généralisée aux mécanismes à couples supérieurs.

La relation qui existe entre le nombre de chaînons mobiles et le nombre de couples dans les mécanismes ne contenant pas de couples supérieurs, d'après la formule (3), est donnée par l'équation

$$3n = 2p + 1. \qquad (4)$$

Cette équation est satisfaite pour les valeurs entières suivantes des variables n et p:

$$\left.\begin{aligned} n &= 2t + 1; \\ p &= 3t + 1, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

où $t \geqslant 0$ entier quelconque.

En donnant successivement à la variable indépendante t des valeurs croissantes à partir du zéro, nous obtenons pour un mécanisme donné tous les nombres possibles de chaînons mobiles et de couples inférieurs.

Pour $t = 0$, on a $n = p = 1$ et, par conséquent, on obtient les schémas de mécanismes très répandus donnés sur les fig. 19 et 20. Les mécanismes à un chaînon mobile et à un couple dans lequel le chaînon mobile est en liaison avec le chaînon fixe, d'après la classification d'Assour, sont des mécanismes de la classe I et de 1er ordre.

Pour $t = 1$, on a $n = 3$, $p = 4$. Les mécanismes à trois chaînons mobiles et à quatre couples inférieurs peuvent être obtenus par

adjonction aux mécanismes de classe I et de Ier ordre d'un groupe composé de deux chaînons, appartenant à trois couples cinématiques. Un tel groupe s'appelle **groupe de classe I et de 2e ordre** ou **groupe à double guidage**. Dans ce groupe un couple cinématique est formé par la liaison de deux chaînons sur les extrémités desquels sont disposés les éléments des couples cinématiques dans lesquels les chaînons sont en liaison avec deux chaînons différents d'un mécanisme quelconque. Quand on ajoute un groupe à double guidage à un mécanisme, c'est-à-dire quand on augmente de deux le nombre de chaînons mobiles du mécanisme et de trois le nombre de couples inférieurs, le nombre de degrés de mobilité d'après la formule (1) reste invariable. En fonction du nombre de couples de rotation et de translation inclus dans le groupe et de leur configuration réciproque, les groupes peuvent être de différents types. Deux types différents de couples inférieurs peuvent être disposés au milieu entre les chaînons et aux extrémités des chaînons de $2^3 = 8$ manières différentes, indiquées par les combinaisons ci-dessous formées à l'aide des lettres R et T désignant respectivement couple de rotation et couple de translation :

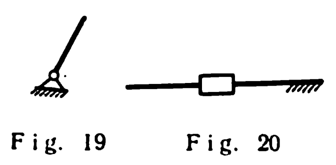


Fig. 19 Fig. 20

nos des combinaisons	1	2	3	4	5	6	7	8
	RRR	RRT	RTR	RTT	TRR	TRT	TTR	TTT.

Parmi ces huit cas possibles, il faut supprimer les combinaisons n°5 et n°7, puisque, sous forme retournée, la combinaison n°5 est une répétition de la combinaison n°2, et la combinaison n°7 de la combinaison n°4. La combinaison n°8 n'est pas acceptable pour désigner un mécanisme à un degré de mobilité par voie d'adjonction à un mécanisme fondamental de classe I et de Ier ordre puisqu'elle ne contient que des couples de translation et que pour les chaînes cinématiques composées seulement de couples de translation c'est la formule (2) qui est satisfaite et non la formule (1). D'après cette formule, on trouve le nombre de degrés de mobilité des groupes ne renfermant que des couples de translation (combinaison n°8), $W = 1$. L'adjonction d'un tel groupe à un mécanisme entraîne l'augmentation du nombre de degrés de mobilité du mécanisme d'une unité.

Ainsi, pour les mécanismes constitués de trois chaînons mobiles et de quatre couples inférieurs, cinq types seulement de groupes à double guidage sont compatibles. En ajoutant les cinq groupes différents à double guidage aux mécanismes de classe I et de Ier ordre, on peut obtenir plusieurs mécanismes différents

à trois chaînons mobiles et à quatre couples inférieurs. Sur les fig. 17 et 21, on donne les schémas de deux mécanismes semblables souvent appliqués dans la technique moderne.

Pour $t=2$, on obtient $n=5$, $p=7$. Les différents mécanismes à cinq chaînons et à sept couples peuvent facilement être obtenus par voie d'adjonction de différents groupes à double guidage aux

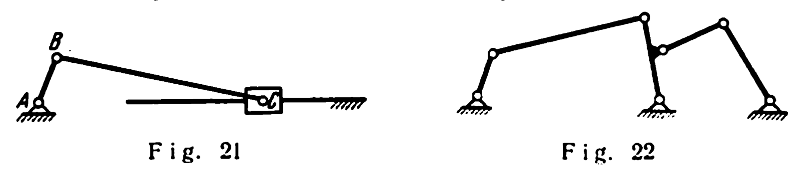


Fig. 21 Fig. 22

différents mécanismes à trois chaînons mobiles et à quatre couples. Sur les fig. 22 et 23, on a représenté deux de ces mécanismes parmi les nombreux mécanismes possibles.

En augmentant t chaque fois d'une unité, on obtient des mécanismes de plus en plus complexes. Chaque mécanisme de complexité successive s'obtient du précédent par voie d'adjonction à deux chaînons différents d'un groupe de classe I et de 2e ordre. Tous les mécanismes obtenus en partant du mécanisme fondamental de classe I et de 1er ordre, par voie d'adjonction successive de groupe de classe I et de 2e ordre, sont d'après la classification d'Assour des mécanismes de classe I et de 2e ordre.

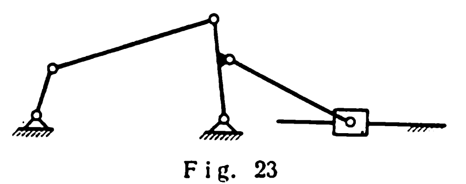


Fig. 23

Les mécanismes de classe I et de 2e ordre sont souvent appliqués en technique ; en outre, l'adjonction d'un groupe de 2e ordre au mécanisme fondamental peut donner des mécanismes à un grand nombre de chaînons et de couples cinématiques. Pour passer du mécanisme fondamental au suivant en complexité, c'est-à-dire à un mécanisme avec $n=3$ et $p=4$, il faut ajouter au mécanisme fondamental deux chaînons à trois couples, mais deux chaînons à trois couples ne sont possibles que dans un seul cas, c'est-à-dire sous la forme d'un groupe à double guidage ; ainsi, les mécanismes avec $n=3$ et $p=4$ ne peuvent être formés que d'une seule manière. Mais déjà lors du passage à un mécanisme plus complexe, mécanisme avec $n=5$ et $p=7$, on peut se poser la question suivante : peut-on l'obtenir autrement que par double adjonction d'un groupe à double guidage ?

Un autre procédé de formation des mécanismes à cinq chaînons et à sept couples peut être obtenu seulement par adjonction au

mécanisme fondamental d'un groupe, constitué de quatre chaînons et de six couples qu'il serait impossible de diviser en deux groupes à double guidage. Le groupe à triple guidage représenté sur la fig. 24 satisfait à cette exigence. Un mécanisme composé d'un mécanisme fondamental et d'un tel groupe, a une structure qui diffère de la structure d'un mécanisme de classe I et de 2ᵉ ordre constitué de cinq chaînons mobiles et de sept couples.

Un groupe à triple guidage s'appelle groupe de classe I et de 3ᵉ ordre et tous les mécanismes contenant un ou plusieurs de ces groupes en présence ou en absence d'un nombre quelconque de

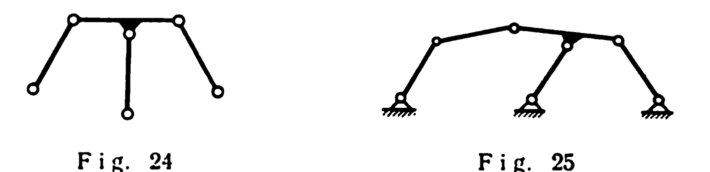


Fig. 24 Fig. 25

groupes de classe I et de 2ᵉ ordre s'appellent mécanismes de classe I et de 3ᵉ ordre.

Le groupe de classe I et de 3ᵉ ordre, tout comme le groupe de classe I et de 2ᵉ ordre, peut, sous plusieurs aspects, dépendre du nombre de couples de rotation et de couples de translation, ainsi que de leur configuration réciproque. Un des nombreux mécanismes de classe I et de 3ᵉ ordre possible à cinq chaînons mobiles et à sept couples est représenté sur la fig. 25 (quand le chaînon qui se trouve à l'extrémité gauche est menant).

De même, on peut obtenir les groupes et les mécanismes d'ordres supérieurs et, pour les complications ultérieures, les classes supérieures. Nous ne nous arrêterons pas sur l'étude de ces mécanismes puisque la majorité des mécanismes qui ont une application dans la technique moderne, d'après la classification d'Assour, doivent appartenir aux mécanismes de classe I et de 1ᵉʳ ou 2ᵉ ordre.

Ainsi, tout mécanisme, indépendamment de sa complexité et de sa structure, peut être obtenu d'après Assour par voie d'adjonction successive de groupes de différentes classes et ordres au mécanisme fondamental de classe I et de 1ᵉʳ ordre. C'est pourquoi l'analyse cinématique et dynamique d'un mécanisme quelconque, indépendamment de sa complexité et de ses formes constructives, peut être réduite à la séparation successive des groupes adjonctifs à partir du dernier ajouté et à l'analyse des différents groupes.

9. SUBSTITUTION DES COUPLES SUPÉRIEURS PAR DES COUPLES INFÉRIEURS

Pour déterminer la classe et l'ordre d'un mécanisme à couples supérieurs, ces derniers doivent être conventionnellement remplacés par des couples inférieurs.

Représentons-nous un mécanisme à trois chaînons et à un couple supérieur (fig. 26) dont les profils curvilignes des chaînons sont des circonférences. Pendant le mouvement des chaînons le point de contact des profils se trouve constamment sur la droite *BC* joignant les centres des circonférences. Pour un mouvement

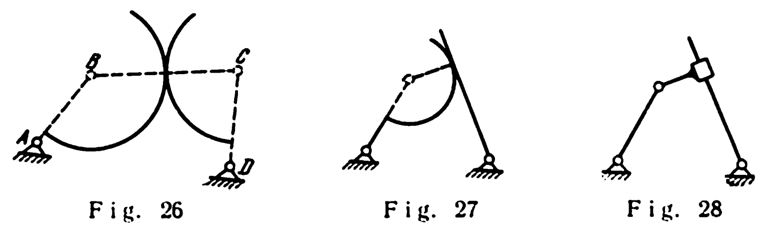


Fig. 26 Fig. 27 Fig. 28

donné de l'un des chaînons, le mouvement de l'autre s'effectue de la même manière que s'il n'y avait pas eu de couple supérieur, celui-ci étant remplacé par le chaînon *BC* avec les couples de rotation *B* et *C*. En remplaçant le couple supérieur par un chaînon à deux couples de rotation, nous obtenons à la place d'un mécanisme à trois chaînons représenté sur la fig. 26, un mécanisme connu de classe I et de 2e ordre représenté sur la fig. 17.

Les centres des cercles sur la fig. 26 sont les centres de courbure des profils des chaînons des couples supérieurs.

Le procédé de substitution du couple supérieur reste sans changement même dans le cas où les profils ne sont pas des circonférences, mais des courbes quelconques. Les vitesses et les accélérations ne changent pas si les articulations *B* et *C* coïncident avec le centre de courbure. Le point de contact des profils se trouve toujours sur la courbe qui passe par les centres de courbure et, par conséquent, la substitution d'un couple supérieur par un chaînon à deux couples de rotation est également possible. Pour des profils curvilignes des chaînons des couples supérieurs autres que des arcs de circonférence mais à d'autres courbes, les rayons de courbure des profils aux points de contact seront différents pour différentes positions des chaînons, ce qui n'a aucune importance pour la détermination de la classe et de l'ordre du mécanisme.

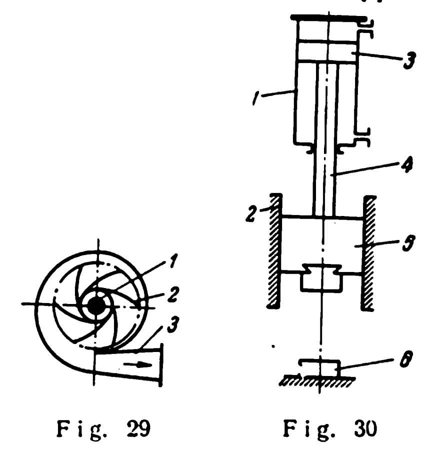
Si le profil de l'un des chaînons du couple supérieur est rectiligne (fig. 27), alors le rayon de courbure de ce profil est infini

au point de tangence. Dans ce cas, un couple de rotation est placé au centre de courbure du profil curviligne et l'autre se réduit à un couple de translation (fig. 28). Dans ce cas, également, nous obtenons un mécanisme de classe I et de 2e ordre.

10. TYPES DE MÉCANISMES LES PLUS RÉPANDUS

Les types de mécanismes plans à couples inférieurs les plus répandus dans la technique moderne sont les mécanismes de classe I et de 1er ou 2e ordre.

Le mécanisme de classe I et de 1er ordre, représentant un chaînon mobile relié au support en un couple de rotation était déjà utilisé dans l'Antiquité (par exemple, la roue sur son essieu) ; il est largement appliqué à l'heure actuelle et le sera sans conteste par la technique de l'avenir. Le moteur électrique est un mécanisme dont le schéma est celui qu'on vient de décrire



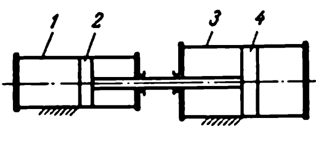


Fig. 29 Fig. 30 Fig. 31

et dans lequel le chaînon mobile est le rotor rigidement fixé à l'arbre tournant librement sur les paliers du bâti immobile. La pompe centrifuge représentée schématiquement sur la fig. 29 est un mécanisme semblable au précédent dont le chaînon mobile est l'arbre *1* sur lequel sont fixées les palettes *2* à l'aide desquelles le liquide est aspiré dans la pompe par la rotation de l'arbre et en est refoulé dans le conduit d'évacuation *3*. (Le conduit d'aspiration n'est pas représenté sur la fig. 29 ; il est disposé perpendiculairement au plan du dessin et c'est pourquoi il ne peut pas être représenté sur cette vue.) La turbine hydraulique et la turbine à vapeur sont des mécanismes du même type ; pour chacune d'elles, le chaînon mobile est encore l'arbre à palettes acceptant l'énergie de l'eau ou de la vapeur véhiculée vers la turbine.

Un exemple de mécanisme de la classe I et de 1er ordre qui soit un chaînon mobile formant avec le support un couple de

translation est donné par marteau pneumatique représenté schématiquement sur la fig. 30 dont le support est constitué par le cylindre à vapeur *1* et les glissières *2* du marteau et le chaînon mobile par le piston *3* avec la tige du piston *4* reliant le piston au marteau *5*. Quand on lâche la vapeur dans la partie inférieure du cylindre, le piston et, par suite, le marteau sous l'action de la pression de la vapeur se déplacent vers le haut ; quand on évacue la vapeur (par une ouverture non indiquée sur la fig. 30), sous son propre poids le marteau entraînant le piston retombe sur la pièce à forger *6*, posée sur l'enclume.

De même, le mécanisme représentant schématiquement sur la fig. 31 une pompe à piston à vapeur, est un mécanisme analogue au précédent où le cylindre à vapeur *1* et le cylindre hydraulique *3* forment le support ; les pistons *2* et *4* réunis entre eux constituent le chaînon mobile. Quand on introduit la vapeur dans la partie gauche du cylindre à vapeur *1*, le piston *2* chasse de la partie droite du cylindre la vapeur utilisée pendant la course précédente. De plus, dans le cylindre hydraulique, le liquide qui se trouve dans la partie droite est chassé dans le conduit d'évacuation de la pompe, tandis que dans la partie gauche, le liquide est aspiré à partir de la conduite d'aspiration. Quand on lâche la vapeur dans la partie droite du cylindre *1*, l'aspiration s'effectue dans la partie droite et l'échappement, dans la partie gauche du cylindre hydraulique. Sur la fig. 31, les conduits pour la vapeur et le liquide, ainsi que les orifices automatiques de fermeture par l'intermédiaire desquels les cylindres sont reliés aux conduits ne sont pas indiqués.

Les mécanismes de classe I et de 1er ordre sont largement appliqués non seulement dans la technique moderne, mais aussi dans toute une série d'installations à usage courant et à transmission manuelle. De plus, le mécanisme de classe I et de 1er ordre entre en qualité de mécanisme fondamental dans la composition de tous les mécanismes de classes et d'ordres supérieurs.

Parmi tous les types possibles de mécanismes de classe I et de 2e ordre, les deux mécanismes suivants sont les plus répandus : le mécanisme articulé à quatre chaînons (voir fig. 17) et le mécanisme bielle-manivelle (voir fig. 21).

Chaque chaînon *AB* et *CD* du mécanisme articulé à quatre chaînons, en fonction des dimensions relatives de tous les chaînons, peut accomplir soit un tour complet autour de l'axe du couple de rotation soit seulement une portion de tour. Dans le premier cas, le chaînon prend le nom de manivelle et dans le second cas, de fléau. Le chaînon *BC* est appelé bielle. En technique, sous des formes très variées, en fonction des longueurs relatives des chaînons, on a affaire à des mécanismes articulés à quatre chaînons

et à une ou à deux manivelles, soit encore à deux fléaux. Le chaînon mobile, dans la plupart des cas, est un chaînon animé d'un mouvement de rotation, tandis que le chaînon accomplissant le travail utile est soit un autre chaînon animé d'un mouvement de rotation soit la bielle.

On donne sur la fig. 32 le schéma d'un mécanisme à fléau mobile qui a des applications dans les différents types de machines-outils à transmission à pédales (tour, machines à coudre, etc.). Dans ces mécanismes le fléau *CD* sous l'action de la pédale est

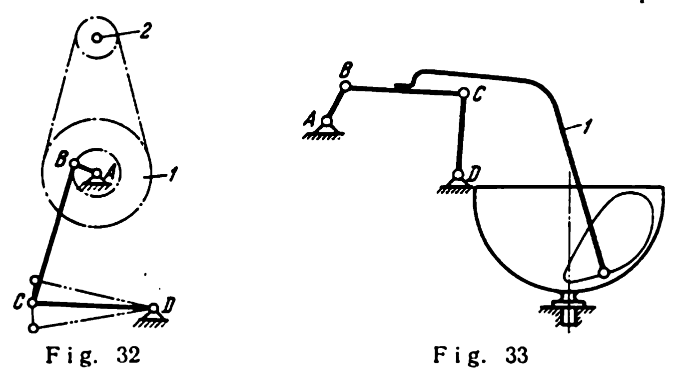


Fig. 32 Fig. 33

animé de mouvements oscillatoires s'écartant d'un angle infime de sa position moyenne.

Pour que le mouvement de bas en haut du fléau puisse s'accomplir par inertie on fixe rigidement sur l'arbre *A* une pièce massive *1* par l'intermédiaire de laquelle à l'aide d'un cordon ou par tout autre moyen on anime d'un mouvement de rotation l'autre arbre *2* sur lequel est fixé l'outil de travail.

On donne sur la fig. 33 le schéma d'un pétrin mécanique articulé à quatre chaînons pour lequel la manivelle est le chaînon mobile et la bielle, le chaînon qui est lié à l'outil de travail. Quand on anime la manivelle d'un mouvement de rotation, l'extrémité de la pièce *1* fixée rigidement à la bielle *BC* décrit une courbe fermée à l'intérieur du récipient contenant la substance à malaxer à l'aide d'un autre mécanisme qui n'est pas représenté sur le schéma.

Un mécanisme articulé à quatre chaînons et à une manivelle est fréquemment construit sous la forme d'un mécanisme à excentrique comme on le voit sur la fig. 34. Dans ce mécanisme la manivelle *AB* est exécutée sous la forme d'un disque cylindrique en rotation autour de l'arbre *A* qui se trouve à la distance *AB* de l'axe géométrique *B* de la surface cylindrique du disque. Le disque est retenu par la bielle *BC*, l'axe *B* étant l'axe du couple

de rotation réunissant la bielle à la manivelle et la surface cylindrique du disque étant la surface de contact des chaînons de ce couple.

Un mécanisme articulé à quatre chaînons et à deux manivelles est fréquemment appliqué sous la forme de mécanisme à chaînons égaux et disposés l'un en face de l'autre (fig. 35).

Un tel mécanisme est dit parallèle ou parallélogramme. Le mécanisme représenté sur la fig. 36 est appelé antiparallèle ou antiparallélogramme.

Les mécanismes à deux manivelles de longueur inégale ne sont guère répandus.

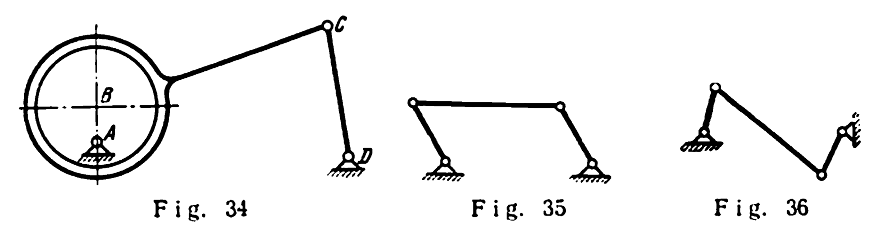


Fig. 34 Fig. 35 Fig. 36

Le mécanisme bielle-manivelle (voir fig. 13 *b* et 21) est construit, dans la plupart des cas, de manière que l'axe immobile du couple de rotation *A* soit situé sur le prolongement du couple de translation guidant le chaînon mobile appelé c o u l i s s e a u.

Le mécanisme bielle-manivelle qui permet de transformer le mouvement de rotation en mouvement de translation et inversement est le plus répandu des mécanismes à quatre chaînons appliqués dans la technique moderne. Ce mécanisme qui se trouve à la base de tous les moteurs à piston (machines à vapeur, moteurs à combustion interne stationnaires, moteurs d'automobile, d'aviation et autres), des pompes à piston et des compresseurs s'applique fréquemment dans les constructions mécaniques d'une autre désignation.

Dans le moteur à piston, le chaînon mobile formé par le coulisseau est, sur le schéma de construction, fig. 13*a*, le piston guidé par les parois du cylindre. La surface cylindrique du piston est toujours construite de façon que le piston puisse glisser librement le long des parois des cylindres sans laisser échapper les gaz ou la vapeur se trouvant sous pression d'un même côté du piston. Dans le cas où la manivelle est en mouvement et le coulisseau guidé, on utilise le mécanisme bielle-manivelle dans les pompes à piston et les compresseurs : pendant une course du piston, le liquide (dans la pompe) ou le gaz (dans le compresseur) est aspiré et pendant la course inverse le liquide ou le gaz est chassé dans la conduite d'échappement. Dans les pompes et les compresseurs, les

pistons travaillent souvent suivant les deux surfaces de base : par l'une des bases du piston s'effectue l'aspiration et par l'autre, simultanément, l'échappement. Ceci est réalisé si le couple de rotation est en liaison directe non pas avec le piston, mais avec la pièce spéciale *1* (fig. 37), rigidement fixée au piston par l'intermédiaire de la tige du piston *3* passant par un dispositif *2* assurant l'étanchéité (appelé boîte à étoupes) qui se trouve dans la culasse. C'est ainsi qu'on peut se représenter le mécanisme bielle-manivelle d'une machine à vapeur à double action.

Parmi les mécanismes à couple supérieur, les plus répandus

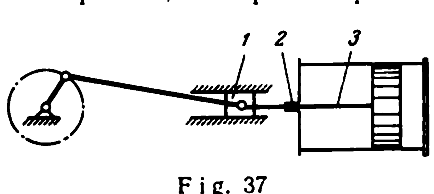


Fig. 37

a)

b)

Fig. 38

sont les *engrenages* composés de deux roues dentées qui s'engrènent (fig. 38*a*). Pendant la rotation de la roue menante, l'une des dents de celle-ci exerce une pression sur une autre dent de la roue menée la faisant tourner jusqu'à ce que les deux dents se désengrènent. La rotation de la roue se fait de manière continue car avant que la première paire de dents ne se désengrène, la paire de dents suivante s'engrène. L'engrenage est ainsi un mécanisme à trois chaînons, dont deux à couples de rotation et un à couple supérieur. Le schéma cinématique d'un engrenage est donné sur la fig. 38 *b*.

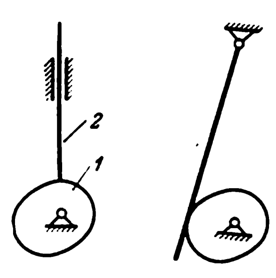


Fig. 39 Fig. 40

Dans les moteurs et autres installations mécaniques, les *mécanismes dits à came* sont largement appliqués. Un mécanisme à came, dont le schéma est donné sur la fig. 39, se compose d'une came *1* et d'un poussoir *2*. La came est en liaison avec le support dans le couple de rotation et avec le poussoir dans le couple de translation. La came et le poussoir sont en liaison dans

le couple supérieur. Du point de vue constructif, le contact permanent du poussoir et de la came est habituellement réalisé à l'aide d'un ressort. Pour réduire l'usure des surfaces en frottement, l'extrémité du poussoir qui repose sur la came se présente habituellement sous forme de galet cylindrique en rotation libre sur l'axe. Le poussoir peut être employé pour remplir diverses désignations. Par exemple, dans les moteurs à piston, le poussoir met en mouvement les soupapes qui ouvrent et ferment les orifices d'entrée du cylindre, pour l'admission de la vapeur ou du mélange carburant-air, et les orifices de sortie, pour l'évacuation de la vapeur utilisée ou des produits de la combustion. Le mécanisme représenté sur la fig. 39 a le grand mérite de permettre à l'aide d'une construction très simple de transformer aisément le mouvement de rotation en mouvement de translation alternatif.

La fig. 40 représente le schéma d'un mécanisme à came dans lequel le poussoir est remplacé par un levier en liaison avec le support dans un couple de rotation. De même,on doit assurer constamment dans ce mécanisme le contact des chaînons des couples supérieurs.

CHAPITRE II

ANALYSE CINÉMATIQUE DES MÉCANISMES PLANS

11. OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Lorsque le chaînon menant est en mouvement, chaque point des chaînes menées est animé d'un mouvement suivant une courbe fermée avec des vitesses et des accélérations définies pour les différentes positions du mécanisme. Pendant l'analyse cinématique on détermine les vitesses et les accélérations de différents points du mécanisme et, dans certains cas, on doit prendre en considération (voir, par exemple, le mécanisme de la fig. 33) la trajectoire de points particuliers.

On procède à la détermination des vitesses et des accélérations pour plusieurs (de 12 à 24) positions du chaînon menant, ce qui permet de construire par points des courbes exprimant la dépendance des vitesses et des accélérations en fonction des positions du chaînon menant. D'après les courbes construites on peut déterminer les vitesses et les accélérations pour d'autres positions non étudiées du chaînon menant.

Pour pouvoir déterminer graphiquement la vitesse et l'accélération d'un point quelconque du mécanisme, quelle que soit la position du chaînon menant, il est nécessaire, pour cette position, de dessiner les positions de tous les chaînons menés.

12. DÉTERMINATION DES POSITIONS D'UN MÉCANISME

Comme nous le savons, tout mécanisme de classe I et de 2e ordre ne comportant pas de couples supérieurs, indépendamment de sa complexité, peut être constitué par voie d'adjonctions successives de groupes à double guidage au mécanisme fondamental de classe I et de 1er ordre. Pour une position quelconque du chaînon menant les positions des chaînons de tous les groupes à double guidage, en commençant par le premier groupe ajouté, peuvent être construi-

tes facilement à l'aide du compas et de la règle. Expliquons-le sur un exemple.

Sur la fig. 41 *a*, on a représenté le schéma d'un mécanisme de classe I et de 2[e] ordre à huit chaînons composé d'un mécanisme

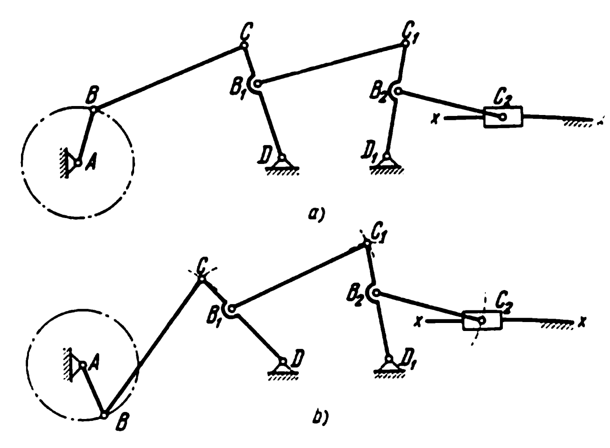


Fig. 41

fondamental de classe I et de 1[er] ordre et de trois groupes à double guidage *BCD*, $B_1C_1D_1$ et B_2C_2x. Pour une nouvelle position du chaînon menant *AB* (fig. 41 *b*) les positions de tous les autres chaînons se déterminent de la manière suivante.

1. La nouvelle position du point *C* est donnée par le point d'intersection des circonférences de rayons *BC* et *CD* passant par les points *B* et *D*. Des deux points d'intersection de ces circonférences, le point qui donne la nouvelle position du point *C* est celui à partir duquel on peut passer au point *C* en déplaçant continûment le chaînon *AB* à partir de la position initiale.

2. La nouvelle position du point B_1 se détermine d'après l'invariance de sa distance aux points *C* et *D*.

3. La nouvelle position du point C_1 est donnée par le point d'intersection des circonférences de rayons B_1C_1 et C_1D_1.

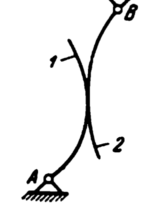


Fig. 42

4. La nouvelle position du point B_2 se détermine d'après l'invariance de sa distance aux points C_1 et D_1.

5. La nouvelle position du point C_2 est donnée par le point d'intersection du support rectiligne du couple de rotation et de la circonférence de rayon B_2C_2.

Pour déterminer la position des chaînons d'un couple supérieur après modification de la position de l'un d'eux, il faut procéder

à des constructions plus compliquées puisque la configuration réciproque de ces chaînons dépend de la forme de leurs profils. Par exemple, après avoir fait tourner d'un certain angle le chaînon *1* représenté sur la fig. 42 du couple supérieur autour de l'axe du couple de rotation *A* et après avoir dessiné le profil de ce chaînon pour sa nouvelle position, il est nécessaire de déterminer le point de tangence des profils et, en fonction de ce point, l'angle de rotation autour de l'axe de rotation *B* du chaînon mené *2*.

La position des chaînons du couple supérieur peut être déterminée en utilisant des chaînons standards. La construction se simplifie si les profils sont donnés par des courbes sous formes mathématiques, et elle devient très simple si les profils ou certaines parties des profils sont des circonférences ou des droites.

13. PLAN DES VITESSES

Les vitesses de points isolés d'un mécanisme se trouvant dans différentes positions peuvent être déterminées à l'aide des plans de vitesse correspondant à ces positions. Cette méthode de détermination des vitesses consiste en ce qui suit.

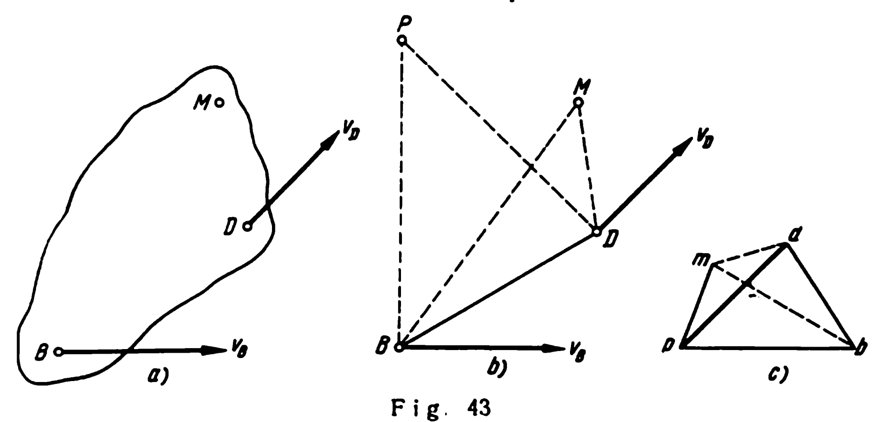


Fig. 43

Supposons connus les grandeurs et les sens des vitesses absolues des points *B* et *D* d'un corps solide en mouvement plan (fig. 43*a*). On demande de déterminer la grandeur et le sens de la vitesse absolue d'un point *M* de ce corps.

Convenons pour la suite de noter : 1) les vitesses absolues par la lettre latine v ayant pour indice la lettre représentative du point dont on indique la vitesse. Par exemple, v_B est la vitesse absolue du point *B* ; 2) les vitesses relatives par la lettre latine v ayant pour indice deux lettres écrites l'une à côté de l'autre, la

première étant le point dont on indique la vitesse et la seconde le point par rapport auquel on considère la vitesse ; par exemple, v_{BD} est la vitesse du point *B* par rapport au point *D*, v_{DB} est la vitesse du point *D* par rapport au point *B* ; 3) la vitesse considérée comme un vecteur, c'est-à-dire comme une quantité ayant une grandeur et un sens, par la lettre latine $\vec{v}$ surmontée d'une petite flèche.

En joignant les points *B* et *D* par une droite on obtient les schémas d'un corps sous la forme du segment de droite *BD*. Puisque l'étude cinématique est indépendante des formes géométriques des corps et que la position d'un corps solide quelle que soit sa forme géométrique est complètement déterminée par la position d'un segment de droite appartenant à ce corps, on prendra donc par la suite en considération le schéma (fig. 43*b*) *BD* du corps et le point *M* distant de *BM* et *DM* des points *B* et *D* comme sur la fig. 43*a*. En représentant sur la fig. 43*b* le corps sous forme du schéma *BD*, nous considérerons le point *M* qui se trouve en dehors de la droite *BD* comme un point appartenant au corps *BD*, c'est-à-dire rigidement fixé au corps.

Par rapport à une échelle linéaire choisie, portons d'un point arbitraire *p* (fig. 43*c*) les vecteurs $\vec{pb}$ et $\vec{pd}$ équipollents aux vitesses absolues $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_D$. En réunissant les points *b* et *d* par une droite, on obtient le plan des vitesses du corps *BD* sous la forme du triangle *pbd*. Aux extrémités des vecteurs $\vec{pb}$ et $\vec{pd}$ les flèches qui indiquent le sens des vitesses absolues sont superflues puisque le sens des vecteurs vitesses absolues issus du point *p* est évident sans ces flèches.

Le point *p* s'appelle le pôle du plan des vitesses. Le vecteur $\vec{db}$ (dans le sens allant de *d* à *b*) représente le vecteur $\vec{v}_{BD}$; le vecteur $\vec{bd}$ (dans le sens allant de *b* à *d*) représente le vecteur $\vec{v}_{DB}$.

Puisque le point *B* par rapport au point *D* (c'est-à-dire à condition que le point *D* soit immobile) et le point *D* par rapport au point *B* ne peuvent se mouvoir que sur une circonférence de rayon *BD*, les vitesses $\vec{v}_{BD}$ et $\vec{v}_{DB}$ sont dirigées seulement suivant la perpendiculaire à *BD* ; ainsi, le côté *bd* du triangle *pbd* est perpendiculaire à *BD*.

Sur le schéma du corps, les lettres majuscules *B* et *D* indiquent la position des points de vitesses absolues données ; sur le plan des vitesses les lettres minuscules *b* et *d* indiquent respectivement les extrémités des vecteurs vitesses absolues et vitesses relatives de ces points. Le pôle *p* du plan est l'origine des vecteurs vitesses absolues de tous les points du corps *BD*. Le point du corps *BD*

dont la vitesse absolue est nulle s'appelle centre instantané de rotation du corps. Dans le plan des vitesses, le point représentant la vitesse absolue du centre instantané de rotation coïncide avec le pôle p.

Etant donné que les vitesses $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_D$ sont dirigées suivant la perpendiculaire aux rayons issus du centre instantané et passant par les points B et D, le centre instantané de rotation P coïncide avec le point d'intersection des perpendiculaires aux vecteurs vitesses $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_D$ menés des points B et D. Le triangle PBD est semblable au triangle pbd et tous deux sont de même configuration. La similitude des triangles découle de la perpendicularité des côtés (par exemple, le côté PD est perpendiculaire au côté pd). La similitude de configuration consiste dans le fait que quand on tourne dans un même sens autour des sommets des angles des deux triangles, les sommets notés par les mêmes lettres se succèdent dans le même ordre (par exemple, en suivant le sens des aiguilles d'une montre les sommets se succèdent dans l'ordre $PDBP$ et $pdbp$).

Passons à présent à la détermination de la vitesse v_M. Pour déterminer cette vitesse, il faut trouver dans le plan des vitesses le point m, extrémité du vecteur vitesse absolue du point M.

Le point M est en mouvement avec le point B et, par conséquent, il se déplace à la vitesse $\vec{v}_B$ de ce point qui, de plus, se trouve en mouvement par rapport à ce point à la vitesse $\vec{v}_{MB}$. Donc, la vitesse absolue $\vec{v}_M$ est la somme géométrique des vitesses $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_{MB}$, ce qui s'exprime par l'équation vectorielle suivante :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_B + \vec{v}_{MB}.$$

Il découle du second membre de cette équation que pour déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ qui est la somme géométrique de $\vec{v}_B$ et de $\vec{v}_{MB}$ il faut mener le vecteur vitesse $\vec{v}_B$ à l'extrémité du vecteur vitesse $\vec{v}_{MB}$ et ensuite réunir par une droite l'origine du vecteur $\vec{v}_B$ à l'extrémité du vecteur $\vec{v}_{MB}$.

Nous avons déjà porté le vecteur vitesse $\vec{v}_B$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{pb}$ du plan des vitesses. Il ne reste plus qu'à construire à l'extrémité de ce vecteur, c'est-à-dire à partir du point b, le vecteur vitesse $\vec{v}_{MB}$. Par rapport au point B le point M ne peut être animé que d'un mouvement de rotation, par conséquent le vecteur vitesse $\vec{v}_{MB}$ issu du point b doit être perpendiculaire à la droite BM. Pour obtenir le point m sur le plan, il faut déter-

miner la longueur du vecteur $\vec{bm}$ et pour cela il faut connaître la grandeur de la vitesse $\vec{v}_{MB}$ qui est encore inconnue. On mènera donc du point *b* non pas le vecteur $\vec{bm}$, mais le support de ce vecteur. Comme on le voit, une équation est insuffisante pour définir la vitesse du point *M*.

Pour définir $\vec{v}_M$ nous pouvons poser une seconde équation vectorielle:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_D + \vec{v}_{MD}.$$

En remarquant que le vecteur vitesse $\vec{v}_D$ représenté par le vecteur $\vec{pd}$ a déjà été construit et que la vitesse $\vec{v}_{MD}$ ne peut être que perpendiculaire à *MD*, menons du point *d* le support de $\vec{v}_{MD}$ perpendiculairement à *MD*. Le point *m* vers lequel convergent les extrémités des vecteurs vitesse absolue et vitesses relatives du point *M* se trouve donc simultanément sur les deux supports soit à leur intersection. En joignant le point *m* au pôle *p* on obtient le vecteur $\vec{pm}$ représentant la vitesse absolue $\vec{v}_M$.

Pour déterminer le point *m* sur le plan des vitesses, nous réunissons sur le schéma le point *M* aux points *B* et *D*, puis après avoir obtenu le triangle *BMD* nous construisons sur le vecteur *bd* le triangle *bmd* des vitesses relatives semblable au triangle *BMD* et de configuration similaire. On procède de la même manière pour déterminer les vitesses absolues et les vitesses relatives d'un point quelconque du corps *BD*. On obtient sur le plan des vitesses le triangle *bmd* dans le cas où le point *M* du schéma n'appartient pas à la droite *BD*. Si le point *M* appartient au segment *BD* ou à son prolongement, alors le segment *bd* ou son prolongement appartiendra au plan des vitesses du point *m*. Dans ce cas aussi les segments *bm* et *dm* sont respectivement proportionnels aux segments *BM* et *DM*.

Si le vecteur $\vec{v}_M$ est donné et si on demande de trouver sur le schéma un point *M* appartenant au corps dont la position est celle indiquée par la fig. 43, qui serait animé de cette vitesse, alors il faudrait dans le plan des vitesses mener le vecteur $\vec{pm}$, construire le triangle *bmd*, puis, sur le schéma, construire le triangle *BMD* semblable au triangle *bmd* et ayant la même position.

L'échelle du plan des vitesses se détermine dès qu'on construit le premier vecteur :

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb},$$

où μ_v est l'échelle du plan des vitesses en m/s·mm;

v_B la grandeur de la vitesse absolue du point B en m/s;
pb la longueur du vecteur vitesse absolue du point B en mm.

Pour déterminer, d'après le plan des vitesses, la grandeur de la vitesse d'un point quelconque, on doit multiplier la longueur du vecteur vitesse par l'échelle du plan.

On peut obtenir la vitesse angulaire ω du corps BD en divisant la vitesse absolue d'un point quelconque du corps par la distance de ce point au centre instantané de rotation; par exemple,

$$\omega = \frac{v_B}{PB}\,.$$

où v_B est évalué en m/s et PB en m. Pour obtenir PB en m il faut mesurer sur le schéma PB en mm, puis le multiplier par l'échelle μ_l m/mm du schéma.

Si le point P se trouve en dehors du dessin alors, d'après la similitude des triangles PBD et pbd, on remplace PB par $k \cdot pb$ où k, le rapport des longueurs des côtés semblables, est égal à $k = \frac{BD}{bd}$. En procédant comme on vient de le faire, on trouve (exprimant pb en mm et multipliant v_B par 10^3 mm/m)

$$\omega = 10^3 \cdot v_B : k \cdot pb = \frac{10^3}{k}\mu_v.$$

Pour la construction du plan des vitesses mentionnées ci-dessus, nous disposions de quatre données: les grandeurs et les sens des deux vitesses $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_D$. On peut construire le plan des vitesses seulement avec trois données quelconques. Par exemple, si on ne connaît que le sens de la vitesse $\vec{v}_D$, alors du pôle p à la place du vecteur $\vec{pd}$ nous n'aurions pu mener que le support de ce vecteur; la position du point d aurait été déterminée dans ce cas en menant le support de $\vec{v}_{DB}$, second terme de l'équation vectorielle $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}$.

Exemple 1. Pour le mécanisme de classe I et de 1[er] ordre dont la position est celle indiquée par la fig. 44 *a*, construire le plan des vitesses et à l'aide de ce plan définir $\vec{v}_{MN}$ en supposant que les points M et N appartiennent au chaînon AB. La vitesse du point B est donnée par le vecteur $\vec{v}_B$.

Menons du pôle p le vecteur $\vec{pb}$ représentant le vecteur $\vec{v}_B$ (fig. 44 *b*). Puisque le point A est fixe alors le point a, extrémité du vecteur $\vec{pa}$ représentant la vitesse $\vec{v}_A$, coïncide avec le pôle p. La droite $\vec{pb}$ est le plan des vitesses.

Pour déterminer $\vec{v}_M$, construisons sur la droite pb le triangle pmb semblable au triangle AMB et de même configuration; $\vec{pm}$ est le vecteur repré-

sentant la vitesse $\vec{v}_M$. De la même manière, on obtient le plan $\vec{pn}$ représentant le vecteur $\vec{v}_N$. En réunissant les points *m* et *n* par une droite on obtient le vecteur *nm* représentant le vecteur $\vec{v}_{MN}$.

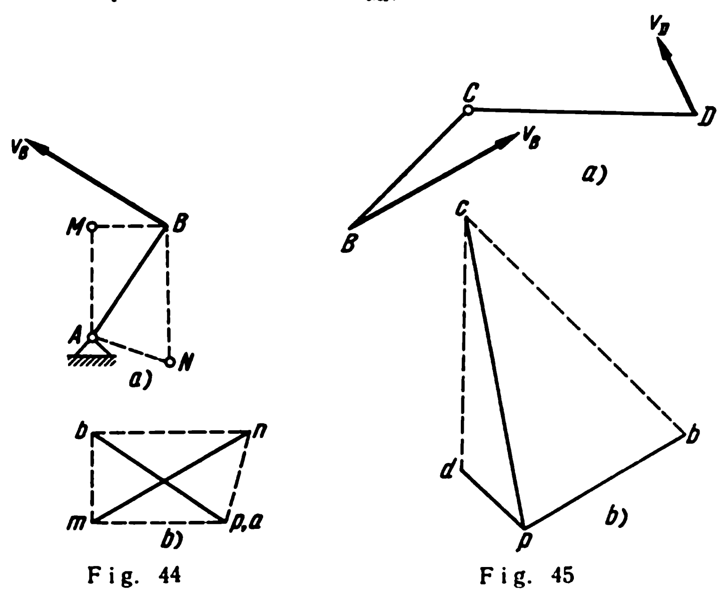


Fig. 44

Fig. 45

Exemple 2. Les chaînons *BC* et *CD* sont en liaison au point *C* par un couple de rotation (fig. 45*a*). Les vitesses des points *B* et *D* sont données par les vecteurs $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_D$. Déterminer $\vec{v}_C$.

Le point *C* appartenant au chaînon *BC* est en mouvement avec le point *B* et, par conséquent, a une vitesse $\vec{v}_B$; de plus, il est aussi en mouvement autour du point *B* avec la vitesse $\vec{v}_{CB}$.

Comme appartenant au chaînon *CD* le point *C* est en mouvement avec le point *D* et, par conséquent, a pour vitesse $\vec{v}_D$; de plus, il est en mouvement autour du point *D* à la vitesse $\vec{v}_{CD}$.

Dans les deux cas, la vitesse $\vec{v}_C$ est donnée sous forme de somme géométrique de deux termes. Donc, pour déterminer $\vec{v}_C$ on dispose des deux équations vectorielles:

$$\vec{v}_C=\vec{v}_B+\vec{v}_{CB}; \quad \vec{v}_C=\vec{v}_D+\vec{v}_{CD}.$$

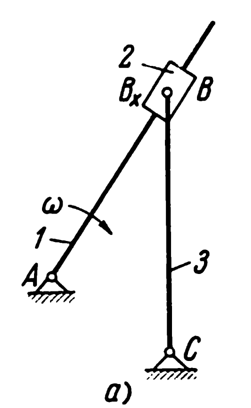
En partant de la première de ces équations, nous devons d'abord mener sur le plan des vitesses (fig. 45*b*) le vecteur $\vec{pb}$ représentant le vecteur $\vec{v}_B$, puis sur le point *b* construire le vecteur $\vec{v}_{CB}$. La vitesse $\vec{v}_{CB}$ ne peut être dirigée que perpendiculairement à *BC* puisque le point *C* par rapport au point *B* ne peut se déplacer que sur la circonférence de rayon *BC*. Or comme

la quantité $\vec{v}_{CB}$ est inconnue, on mène alors du point b le support de $\vec{v}_{CB}$ perpendiculairement à BC.

En ce qui concerne la seconde équation, s'aidant des considérations exposées ci-dessus, menons le vecteur $\vec{pd}$ représentant le vecteur $\vec{v}_D$ et du point d le support de $\vec{v}_{CD}$ perpendiculairement à CD.

Puisque le point c du plan des vitesses doit appartenir aux deux supports, alors en joignant leurs points d'intersection au pôle on obtient $\vec{pc}$ représentant le vecteur $\vec{v}_C$.

Exemple 3. Sur la fig. 46 *a* on donne le schéma d'un mécanisme à quatre chaînons, à trois couples de rotation et à un couple de translation. Le chaînon menant *1* est en liaison avec la glissière *2* par un couple de translation ; le chaînon *3* est en liaison avec la glissière par le couple de rotation B. La vitesse angulaire du chaînon *1* est dirigée dans le sens des aiguilles d'une montre, sa grandeur est donnée. Déterminer $\vec{v}_B$.



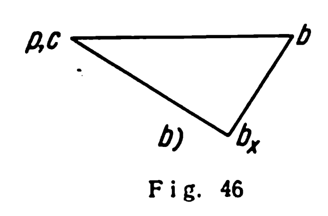


Fig. 46

Marquons sur le chaînon *1* le point B_x placé sous le point B, c'est-à-dire se trouvant à la distance AB_x égale à AB du point A.

Pour déterminer $\vec{v}_B$ on peut poser les deux équations vectorielles :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B_x} + \vec{v}_{BB_x};$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}.$$

D'après la première des équations nous devons mener pb_x représentant le vecteur v_{B_x} et de l'extrémité de ce vecteur construire le vecteur b_xb représentant la vitesse v_{BB_x}.

La longueur du vecteur $pb_x = \frac{v_{B_x}}{\mu_v} = \frac{l_{AB_x} \cdot \omega}{\mu_v}$

où l_{AB_x} est la longueur AB_x, ω la vitesse angulaire du chaînon *1* et μ_v l'échelle du plan des vitesses.

La longueur du vecteur b_xb ne peut être encore déterminée puisque la grandeur de la vitesse $\vec{v}_{BB_x}$ est inconnue. Puisque le point B par rapport au point B_x ne peut se déplacer que le long du chaînon *1*, alors en menant le vecteur pb_x perpendiculairement au chaînon *1* à partir du point b_x, on mène le support de $\vec{v}_{BB_x}$ perpendiculairement au chaînon *1* (fig. 46 *b*).

En vertu de la seconde équation, le point c coïncide avec le pôle puisque $v_C = 0$, et du point c nous menons le support de $\vec{v}_{BC}$ perpendiculairement à BC étant donné que le point B, par rapport au point C, peut se déplacer seulement sur la circonférence de rayon BC.

Le point b d'intersection des supports permet de déterminer la grandeur et le sens de $\vec{pb}$ représentant le vecteur $\vec{v}_B$.

Exemple 4. Pour l'instant de temps correspondant à la position indiquée par la figure 47 *a*, les chaînons *1* et *2* d'un mécanisme à trois chaînons à un

couple supérieur se trouvent en contact au point R du chaînon *1* et au point S du chaînon *2*. La vitesse angulaire ω du chaînon menant *1* est donnée. Déterminer $\vec{v}_{RS}$.

Pour résoudre ce problème, nous disposons des données suivantes:

1) la grandeur et le sens du vecteur $\vec{v}_R$: la grandeur étant $v_R = l_{AR}\omega$, où l_{AR} est la longueur AR, le sens étant de gauche à droite perpendiculairement à AR.

2) le sens de la vitesse $\vec{v}_S$: de gauche à droite perpendiculairement à BS; la grandeur de v_S étant inconnue puisque la vitesse angulaire du chaînon mené est inconnue;

3) le support de la vitesse $\vec{v}_{SR}$: suivant la tangente aux profils des chaînons au point de contact. Le point S, par rapport au point R, se déplace seulement suivant la tangente aux profils au point de contact sinon le point S s'enfoncerait dans le profil du chaînon menant ou bien s'en écarterait.

En partant de l'équation vectorielle

$$\vec{v}_S = \vec{v}_R + \vec{v}_{SR},$$

nous menons le vecteur $\vec{pr}$ représentant la vitesse $\vec{v}_R$ avec $pr = v_R : \mu_v$ où μ_v est l'échelle du plan des vitesses, et du point r le support de $\vec{v}_{SR}$. Puisque l'on ne connaît que le sens du vecteur v_S, menons alors du pôle p le support de cette vitesse (fig. 47 *b*).

Le point d'intersection des supports de $\vec{v}_{SR}$ et de $\vec{v}_S$ détermine la position du point s sur le plan des vitesses. Le vecteur $\vec{sr}$ représente le vecteur $\vec{v}_{RS}$.

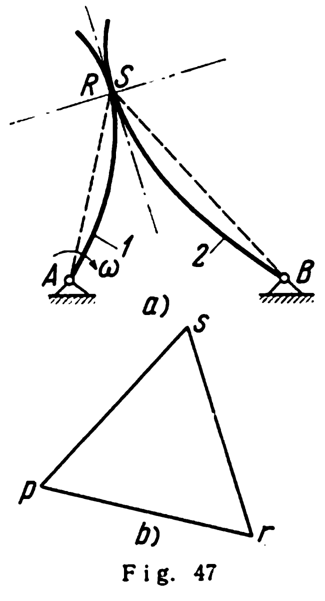


Fig. 47

Exemple 5. Construire le plan des vitesses et définir les vitesses v_{CB} et v_{CD} d'un mécanisme articulé à quatre chaînons pour la position indiquée sur la fig. 122 *a* d'après les données se trouvant à la page 122 (exemple numérique).

Exemple 6. Construire le plan des vitesses et déterminer la vitesse v_{CB} pour le mécanisme bielle-manivelle dont la position est celle indiquée sur la fig. 123 *a*, et dont les données se trouvent à la page 128 (exemple numérique).

Exemple 7. Construire le plan des vitesses, déterminer les vitesses v_{CB}, v_{ED}, v_{EF}, et la vitesse angulaire du chaînon EF d'un mécanisme à six chaînons dont la position est celle indiquée sur la fig. 124 *a*, et dont les données se trouvent à la page 133 (exemple numérique).

14. PLAN DES ACCÉLÉRATIONS

Supposons que l'on connaisse d'après le plan des vitesses, les vitesses de tous les points du corps BD (fig. 48 *a*) et les accélérations absolues $\vec{a}_B$ et $\vec{a}_D$ de deux points B et D de ce corps.

On demande de déterminer l'accélération $\vec{a}_M$ du point M appartenant au corps BD.

Le corps BD est animé d'un mouvement composé. En le considérant en mouvement avec le point B et en rotation autour du point B, nous obtenons pour déterminer l'accélération totale du point M l'équation vectorielle

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}_{MB},$$

ou

$$a_M = a_B + \vec{a}^{\,n}_{MB} + \vec{a}^{\,\tau}_{MB},$$

puisque l'accélération totale relative $\vec{a}_{MB}$ est la somme géométrique des accélérations normale et tangentielle.

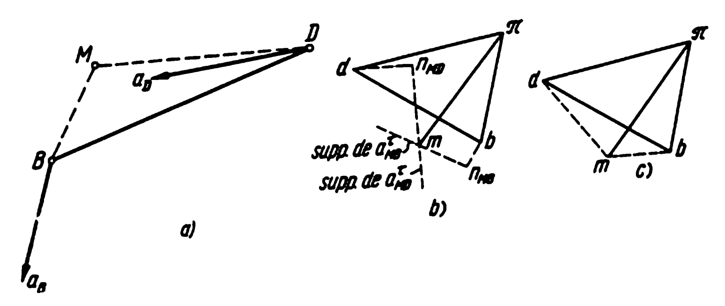


Fig. 48

Dans cette équation l'accélération $\vec{a}_B$ est connue en grandeur et en direction, l'accélération normale $\vec{a}^{\,n}_{MB}$ a pour direction celle allant du point M vers le point B et est égale à $v^2_{MB}:l_{BM}$, l'accélération tangentielle $\vec{a}^{\,\tau}_{MB}$ est dirigée perpendiculairement à BM, sa grandeur étant inconnue.

En considérant le mouvement du point M comme en mouvement avec le point D et comme en mouvement par rapport à D, on trouve

$$\vec{a}_M = \vec{a}_D + \vec{a}^{\,n}_{MD} + \vec{a}^{\,\tau}_{MD},$$

où $\vec{a}_D$ est connu en grandeur et en direction, $a^n_{MD} = v^2_{MD}:l_{MD}$ et est dirigée suivant DM de M vers D; $\vec{a}^{\,\tau}_{MD}$ est inconnue en grandeur et est dirigée suivant la perpendiculaire à DM.

Pour déterminer l'accélération du point M on peut construire un plan, dit des accélérations, analogue au plan des vitesses.

Le second membre de chacune des équations vectorielles données ci-dessus montre que l'accélération $\vec{a}_M$ peut être obtenue en composant géométriquement trois accélérations.

En nous basant sur la première de ces équations, menons d'un point arbitraire π (fig. 48 *b*), qui par la suite sera appelé pôle du plan des accélérations, le vecteur $\vec{\pi b}$ représentant le premier des termes géométriques, soit le vecteur $\vec{a}_B$. Sur l'extrémité de ce vecteur, on construit le vecteur $\vec{bn}_{MB}$ représentant le deuxième terme géométrique, l'accélération $\vec{a}^n_{MB}$. Sur le schéma du corps, l'accélération $\vec{a}^n_{MB}$ a pour sens celui allant du point M vers le point B, donc le vecteur $\vec{bn}_{MB}$ doit être issu du point b et dirigé parallèlement à MB vers le bas et de droite à gauche. On reporte le vecteur $\vec{bn}_{MB}$ avec la même échelle que pour le vecteur $\vec{\pi b}$.

L'échelle du plan des accélérations définie, après avoir mené le vecteur $\vec{\pi b}$, est égale à

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b}\, m/s^2 \cdot mm,$$

et par suite

$$bn_{MB} = \frac{a^n_{MB}}{\mu_a}\, mm.$$

Sur l'extrémité du vecteur $\vec{bn}_{MB}$, c'est-à-dire au point n_{MB}, nous devons construire le vecteur correspondant au dernier terme géométrique, c'est-à-dire correspondant à l'accélération a^τ_{MB}. Etant donné que l'accélération n'est connue que par son sens, on doit donc se limiter à son support que l'on mène perpendiculairement à MB ou, ce qui revient au même, perpendiculairement à $\vec{bn}_{MB}$. Ainsi, en utilisant la première des équations vectorielles données ci-dessus, on aboutit aux résultats partiels suivants: le point m, extrémité du vecteur $\vec{\pi m}$ représentant l'accélération absolue $\vec{a}_M$ de ce point, doit appartenir au support de l'accélération a^τ_{MB} mené par le point n_{MB}.

Conformément à la deuxième équation vectorielle donnée ci-dessus menons du pôle π le vecteur $\vec{\pi d}$ représentant l'accélération $\vec{a}_D$ et sur l'extrémité de ce vecteur construisons le vecteur $\vec{dn}_{MD}$ représentant l'accélération $\vec{a}^n_{MD}$. La longueur du vecteur

$\vec{dn}_{MD}$ est égale à $a^n_{MD}:\mu_a$, de direction parallèle à *MD* en allant de *d* vers le bas et de gauche à droite, c'est-à-dire de même sens que l'accélération $\vec{a}^n_{MD}$ sur le schéma du corps. Puisqu'on connaît seulement le sens de l'accélération a^τ_{MD}, alors du point n_{MD} on mène le support de cette accélération perpendiculairement à *MD* ou ce qui est exactement la même chose, perpendiculairement à $\vec{dn}_{MD}$. Le point *m*, extrémité du vecteur $\vec{\pi m}$ de l'accélération inconnue $\vec{a}_M$, est obtenu en tant que le point d'intersection des deux supports et appartient à chacun d'entre eux.

Si sur la fig. 48 *b* on mène du point *m* des droites passant par des points *b* et *d*, on obtient le triangle *mbd* semblable au triangle *MBD* du schéma du corps et de configuration similaire. C'est pourquoi la position du point *m* sur le plan des accélérations aurait pu être déterminée comme l'indique la fig. 48 *b*, c'est-à-dire en construisant sur le vecteur $\vec{bd}$ le triangle *bmd* semblable au triangle *BMD* et de même position. Les triangles obtenus sont semblables puisque les longueurs *bd*, *bm* et *dm* des vecteurs accélérations relatives sont respectivement proportionnelles aux longueurs des segments *BD*, *BM*, *DM* qui sont les rayons de rotation des extrémités de ces segments quand ils sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Exemple 1. Les vitesses et les accélérations absolues des points *B* et *D* du corps *BD* animé d'un mouvement d'un plan sur un plan sont données par des vecteurs indiqués sur le schéma (fig. 49 *a*). Déterminer l'accélération du centre instantané de rotation du corps.

Construisons le plan *pbd* des vitesses (fig. 49 *b*) et le plan *πbd* des accélérations (fig. 49 *c*).

Pour déterminer sur la fig. 49 *a* la position du centre instantané de rotation *P*, construisons le triangle *BPD* semblable au triangle *bpd* de la fig. 49 *b*. Pour déterminer sur le plan des accélérations la position du point *p*, extrémité du vecteur $\vec{\pi p}$ de l'accélération inconnue $\vec{a}_p$, construisons sur le vecteur $\vec{bd}$ le triangle *bpd* semblable au triangle *BPD* (fig. 49 *a*).

Puisque les trois triangles cités doivent être semblables et avoir la même configuration, il est inutile de construire le triangle *BPD* sur la fig. 49 *a*; on peut se limiter à la construction sur le vecteur $\vec{bd}$ du plan des accélérations (fig. 49 *c*) du triangle *bpd* semblable au triangle *bpd* du plan des vitesses (fig. 49 *b*). En joignant le point *p* au pôle *π* on obtient le vecteur $\vec{\pi p}$ représentant l'accélération $\vec{a}_p$.

Exemple 2. Les chaînons *BC* et *CD* forment le couple *C*. Les vitesses $\vec{v}_B$ et $\vec{v}_D$ et les accélérations $\vec{a}_B$ et $\vec{a}_D$ sont connues. Déterminer $\vec{a}_C$ (fig. 50 *a*).

Pour déterminer les vitesses $\vec{v}_{CB}$ et $\vec{v}_{CD}$ nécessaires pour construire le plan des accélérations, construisons le plan des vitesses (fig. 50 *b*).

En considérant d'abord le mouvement du point C comme étant en mouvement avec le point B et en mouvement par rapport au point B, ensuite en mouvement avec le point D et en mouvement par rapport au point D, on obtient les deux équations vectorielles définissant $\vec{a}_C$:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB};$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}^{\,n}_{CD} + \vec{a}^{\,\tau}_{CD}.$$

En partant de la première équation, menons $\vec{\pi b}$ représentant le vecteur $\vec{a}_B$ (fig. 50 *c*). La grandeur $a^n_{CB} = v^2_{CB} : l_{BC} = (bc \cdot \mu_v)^2 : l_{BC}$, où bc est la longueur

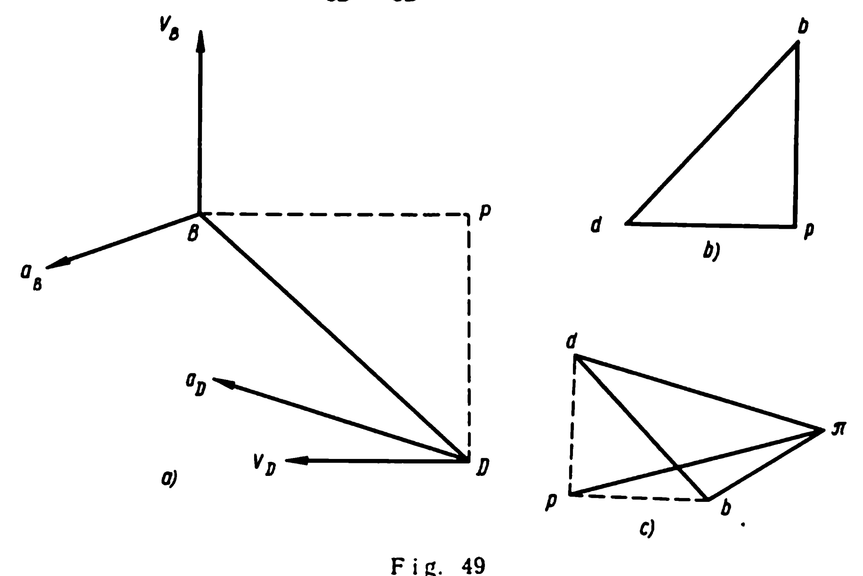


Fig. 49

du vecteur $\vec{v}_{CB}$ du plan des vitesses et μ_v l'échelle du plan des vitesses. Le sens du vecteur $\vec{a}^{\,n}_{CB}$ sur la fig. 50 *a* est celui allant du point C vers le point B. C'est pourquoi nous menons du point b le vecteur accélération $\vec{bn}_{CB}$ parallèlement à BC. Le support de l'accélération $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, dont la grandeur est inconnue, est mené du point n_{CB} perpendiculairement à BC et, par conséquent, à $\vec{bn}_{CB}$.

En ce qui concerne la seconde équation, menons $\vec{\pi d}$ représentant le vecteur $\vec{a}_D$ puis sur l'extrémité de ce vecteur $\vec{dn}_{CD}$ représentant le vecteur $a^n_{CD} = v^2_{CD} : l_{CD} = (cd \cdot \mu_v)^2 : l_{CD}$ parallèlement à CD de gauche à droite, du point n_{CD} le support de $\vec{a}^{\,\tau}_{CD}$ perpendiculairement à CD.

Le point d'intersection des supports détermine la grandeur et le sens de $\vec{\pi c}$ représentant le vecteur $\vec{a}_C$.

Exemple 3. Le chaînon BC est lié à une glissière en mouvement suivant une direction fixe xx (fig. 51 *a*) dans un couple de rotation C. A l'instant qui correspond à la position représentée sur la fig. 51 *a*, la vitesse $\vec{v}_B$ et l'accélération $\vec{a}_B$ sont connues. Déterminer $\vec{a}_C$.

D'abord, nous construisons le plan des vitesses nécessaire à la construction du plan des accélérations (fig. 51 *b*).

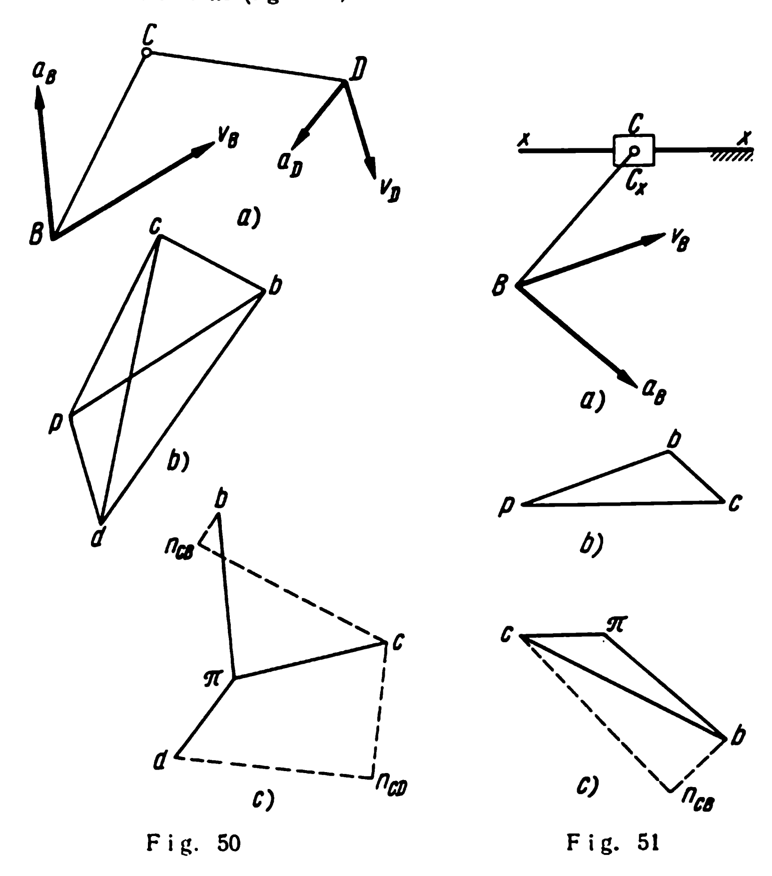


Fig. 50 Fig. 51

En considérant le mouvement du point C d'abord en mouvement avec le point B et en mouvement par rapport au point B, puis en mouvement avec le point C_x lié rigidement au coulisseau et le mouvement par rapport à ce point (le point C_x peut être supposé appartenir au coulisseau au-dessous du point C), on obtient pour déterminer $\vec{a}_C$ les deux équations vectorielles:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB};$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C_x} + \vec{a}^{\,n}_{CC_x} + \vec{a}^{\,\tau}_{CC_x}.$$

En se basant sur la première équation, menons du pôle $\vec{\pi b}$ représentant le vecteur $\vec{a}_B$ (fig. 51 *c*). La grandeur $a^n_{CB} = v^2_{CB} : l_{BC} = (bc \cdot \mu_v)^2 : l_{BC}$, où *bc* est la longueur du vecteur v_{CB} du plan des vitesses et μ_v l'échelle du plan des vitesses. La longueur $bn_{CB} = a^n_{CB} : \mu_a$, où $\vec{bn}_{CB}$ représente le vecteur $\vec{a}^n_{CB}$ et μ_a l'échelle du plan des accélérations. Le sens de $\vec{a}^n_{CB}$ sur la fig 51 *a* est celui allant du point *C* vers le point *B* donc, sur le plan des accélérations, nous menons du point *b* le vecteur $\vec{bn}_{CB}$ parallèle à *BC* vers le bas et de droite

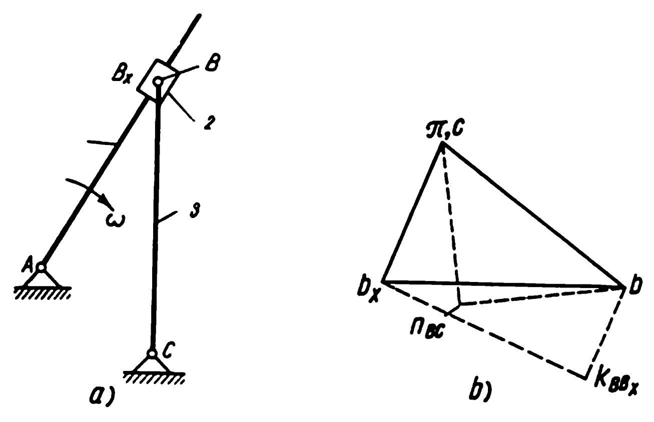


Fig. 52

à gauche. La grandeur de $\vec{a}^\tau_{CB}$ est inconnue, son sens étant celui de la perpendiculaire à *BC* et, par conséquent, de la perpendiculaire à $\vec{bn}_{CB}$; c'est dans ce sens qu'on mène du point n_{CB} le support de cette accélération.

Dans le second membre de la seconde équation, les deux premiers termes géométriques sont respectivement égaux à zéro : a_{C_x} parce que le point C_x est immobile et $a^n_{CC_x} = v^2_{CC_x} : \varrho$ parce que ϱ, le rayon de courbure de la trajectoire du point *C* en mouvement par rapport au point C_x, est infini. L'accélération $\vec{a}_{CC_x}$ sur la fig. 51 *a* est dirigée le long du coulisseau *xx*, donc du pôle π nous menons le support de cette accélération parallèlement au coulisseau.

Le point d'intersection *c* des supports de $\vec{a}^\tau_{CB}$ et $\vec{a}^\tau_{CC_x}$ détermine la grandeur et la direction de $\vec{\pi c}$ représentant le vecteur $\vec{a}_C$.

Sur le plan des accélérations le vecteur $\vec{\pi c}$ a le sens allant de droite à gauche tandis que le vecteur $\vec{pc}$ sur le plan des vitesses, de gauche à droite; par conséquent, le point *C* dans la position indiquée par la fig. 51 *a* est animé d'un mouvement ralenti.

Exemple 4. Construire le plan des accélérations pour le mécanisme dont le schéma est donné sur la fig. 52 *a*.

Lorsqu'on pose les équations vectorielles définissant l'accélération $\vec{a}_B$, il faut prendre en considération que le point *B* se déplace sur le chaînon en

rotation avec une accélération de rotation (de Coriolis) qui sera également notée par la lettre a surmontée de l'indice k.

Pour déterminer $\vec{a}_B$ on peut poser les deux équations vectorielles:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B_x} + \vec{a}^{\,n}_{BB_x} + \vec{a}^{\,k}_{BB_x} + \vec{a}^{\,\tau}_{BB_x};$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{BC} + \vec{a}^{\,\tau}_{BC}.$$

Déterminons les grandeurs et les directions des termes géométriques du second membre de ces deux équations :

Accélérations	Grandeurs	Sens
$\vec{a}_{B_x}$	$v^2_{B_x} : l_{AB_x} = (pb_x \cdot \mu_v)^2 : l_{AB_x}$, où pb_x est la longueur du vecteur $\vec{v}_{B_x}$ du plan des vitesses indiquées sur la fig. 52 *b* et μ_v l'échelle de ce plan	Du point B_x (fig. 52 *a*) vers le point A puisque pendant la rotation du chaînon *1* avec une vitesse uniforme l'accélération totale est égale à l'accélération normale
$\vec{a}^{\,n}_{BB_x}$	$v^2_{BB_x} : \varrho = 0$ puisque $\varrho = \infty$	
$\vec{a}^{\,k}_{BB_x}$	$2\omega \cdot v_{BB_x} = 2\omega\,(bb_x \cdot \mu_v)$, où bb_x est la longueur du $\vec{v}_{BB_x}$, vecteur du plan des vitesses	Le vecteur vitesse $\vec{v}_{BB_x}$ est déterminé à une rotation de 90° dans le sens de rotation du chaînon *1*, c'est-à-dire, dans le cas donné, dans celui des aiguilles d'une montre. La vitesse $\vec{v}_{BB_x}$ a le sens allant de bas en haut et de gauche à droite (voir vecteur $\vec{b_x b}$ sur la fig. 46 *b*) parallèlement au chaînon *1* ; par conséquent, l'accélération $\vec{a}^{\,k}_{BB_x}$ a le sens de gauche à droite perpendiculaire au chaînon *1*
$\vec{a}^{\,\tau}_{BB_x}$	Inconnue	Suivant le chaînon *1*
$\vec{a}_C$	Est nulle puisque le point C est immobile	
$\vec{a}^{\,n}_{BC}$	$v^2_{BC} : l_{BC} = (cb \cdot \mu_v)^2 : l_{BC}$, où cb est la longueur du vecteur $\vec{v}_{BC}$ du plan des vitesses	Du point B vers le point C
$\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$	Inconnue	Perpendiculaire au chaînon *3*

En divisant la grandeur de l'accélération par l'échelle μ_a du plan des accélérations, nous définissons les longueurs des vecteurs. En prenant en considération les sens de tous les vecteurs indiqués ci-dessus conformément à la

première équation donnée plus haut, menons successivement (fig. 52 *b*) le vecteur $\overrightarrow{\pi b_x}$ représentant l'accélération a_{B_x}, le vecteur $\overrightarrow{b_x k_{BB_x}}$ représentant l'accélération $\vec{a}^{\,k}_{BB_x}$ et le support de l'accélération $\vec{a}^{\,\tau}_{BB_x}$. En vertu de la seconde équation du point c qui coïncide avec le pôle π, menons le vecteur $\overrightarrow{cn_{BC}}$ représentant l'accélération $\vec{a}^{\,n}_{BC}$ et de l'extrémité de ce vecteur le support de l'accélération $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$. Le point b d'intersection des supports des accélérations $\vec{a}^{\,\tau}_{BB_x}$ et $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$ détermine l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{\pi b}$ représentant l'accélération $\vec{a}_B$.

Exemple 5. Construire le plan des accélérations pour un mécanisme articulé à quatre chaînons dont la position est donnée sur la fig. 122 *a* d'après les données indiquées à la page 122 et définir les accélérations a_{S_1}, a_{S_2} et a_{S_3} des centres de gravité (exemple numérique).

Exemple 6. Construire le plan des accélérations pour le mécanisme bielle-manivelle pour la position donnée sur la fig. 123 *a* d'après les données indiquées à la page 128 et déterminer les accélérations a_{S_1}, a_{S_2} et a_C (exemple numérique).

Exemple 7. Construire le plan des accélérations pour un mécanisme à six chaînons dont la position est indiquée sur la fig. 124 *a* d'après les données de la page 133, déterminer les accélérations a_{S_1}, a_{S_2}, a_C, a_{S_4}, a_{S_5} et l'accélération angulaire du chaînon *EF*.

15. DIAGRAMMES CINÉMATIQUES

L'étude cinématique a pour objet de mettre en évidence les vitesses et les accélérations de certains points pour différentes positions du mécanisme. Une représentation géométrique de la cinématique d'un mécanisme est donnée par les diagrammes cinématiques sous forme de courbes des chemins parcourus, des vitesses et des accélérations. Dans certains cas, en plus de ces courbes il est nécessaire de construire la trajectoire de points particuliers.

Prenons connaissance des procédés de construction des diagrammes cinématiques sur l'exemple du mécanisme bielle-manivelle à quatre chaînons très répandu en technique.

Comme on l'a déjà mentionné, le mécanisme bielle-manivelle se trouve à la base de nombreux moteurs à piston, des pompes à piston, des compresseurs et de nombreux autres mécanismes. Dans les moteurs à piston, le chaînon mobile est toujours le coulisseau; dans les pompes à piston et les compresseurs le chaînon mobile est la manivelle. Mais dans la plupart des machines comportant un mécanisme bielle-manivelle, la manivelle qui est soit menée soit menante est toujours animée d'un mouvement de rotation à vitesse angulaire très voisine de la constante. C'est pourquoi dans l'étude cinématique du système bielle-manivelle, la manivelle est choisie en tant que chaînon directeur (c'est-à-dire

chaînon à lois de mouvement données) et même dans le cas où ce chaînon n'est pas menant.

Pour une vitesse angulaire constante, les angles de rotation de la manivelle évalués à partir d'une certaine position initiale sont

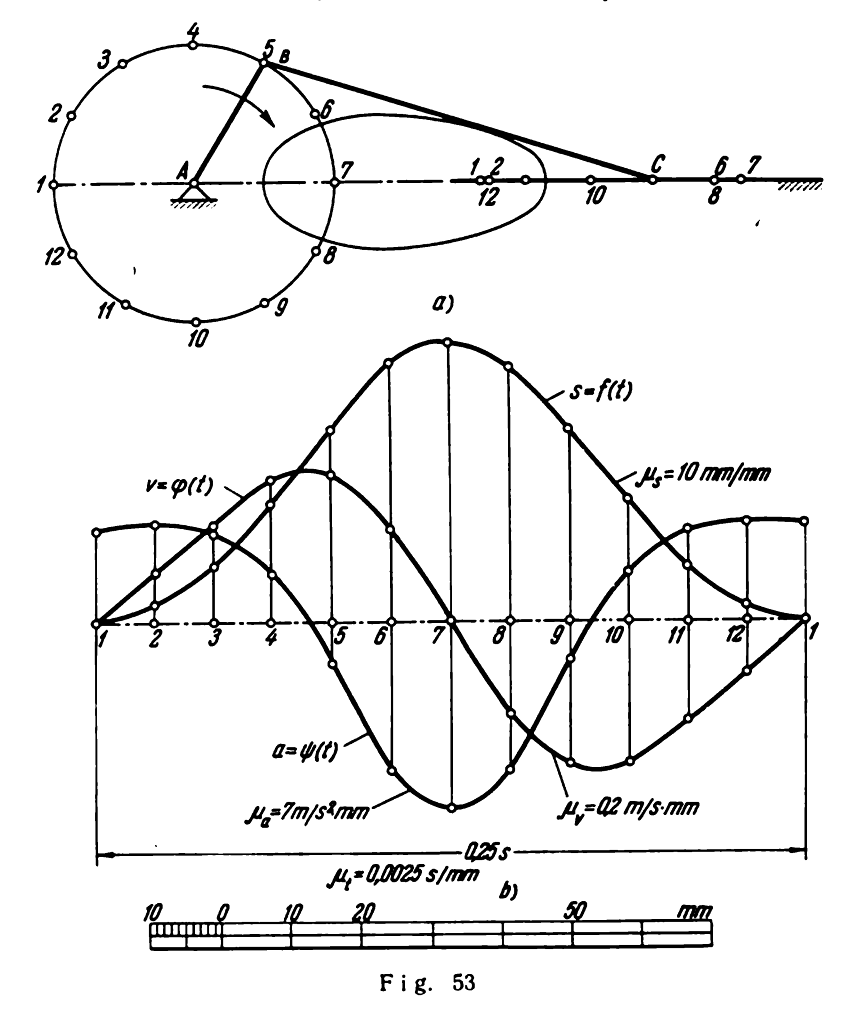


Fig. 53

directement proportionnels aux intervalles de temps nécessaires à la manivelle pour accomplir les rotations, et c'est pourquoi les courbes qui expriment les dépendances des chemins parcourus des vitesses ou des accélérations d'un point quelconque du mécanisme en fonction de l'angle de rotation de la manivelle sont aussi des

courbes qui représentent les dépendances de ces mêmes grandeurs en fonction du temps.

Pour une échelle donnée on a représenté sur la fig. 53*a* le schéma du mécanisme bielle-manivelle avec une manivelle *AB* de 200 mm de longueur et une bielle *BC* de 600 mm de longueur.

La manivelle est animée d'un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante de 240 tours à la minute.

Nous allons construire les diagrammes des chemins parcourus, des vitesses et des accélérations du point *C* qui habituellement présentent le plus d'intérêt pour le mécanisme bielle-manivelle.

En fonction de la précision exigée dans chaque cas on considérera de 12 à 24 ordonnées pour construire chaque courbe. Nous allons construire 12 points pour chaque courbe. Le point *C* occupe la position extrême à gauche lorsque le point *B* est en position extrême gauche. Nous prenons cette position comme position initiale et sur la trajectoire du point *B* notons-la par le chiffre *1*. Après avoir divisé la circonférence décrite par le point *B* en 12 parties égales, notons successivement par des chiffres dans le sens de rotation de la manivelle, c'est-à-dire dans celui des aiguilles d'une montre, les différentes positions du point *B*. Par ces mêmes chiffres on indique les positions respectives du point *C* sur la glissière.

Portons sur l'axe des abscisses (fig. 53*b*) le segment *1—1* dont la longueur exprimera graphiquement l'intervalle de temps égal à 0,25 s, pendant lequel (pour 240 tours à la minute) la manivelle fait un tour. Partageons ce segment en 12 parties égales, c'est-à-dire en autant de parties égales que la trajectoire du point *B* sur la fig. 53*a*.

Construisons d'abord la courbe $s=f(t)$, où s est la distance du point *C* évaluée de gauche à droite à partir de sa position initiale (extrême gauche) et t l'intervalle de temps compté à partir de l'instant initial. Puisque les positions du point *C* sur sa trajectoire pour différentes positions du point *B* sont déterminées par l'invariance de la distance *BC* de ces points, la détermination de l'ordonnée de la courbe $s=f(t)$ ne présente alors pas de difficultés. En menant sur la fig. 53*b* les ordonnées et en les réunissant par une courbe continue, on obtient la courbe $s=f(t)$.

Pour construire la courbe $v=\varphi(t)$ où v est la vitesse du point *C* et t a la même signification que dans la courbe précédente, il faut déterminer la vitesse du point *C* pour les 12 différentes positions du point *B*, ce qui en général demande la construction d'autant de plans des vitesses. Dans le cas donné vu la symétrie du mécanisme ce qui entraîne la symétrie de la courbe $s=f(t)$ par rapport à l'ordonnée moyenne menée par le point *7*, les vitesses du point *C*, pour des positions symétriques par rapport à cette ordonnée, auront des grandeurs égales et des signes opposés. En

prenant tout ceci en considération on peut donc se limiter à la construction des plans des vitesses seulement pour les 7 premières positions du point B. Deux branches symétriques de la courbe $v = \varphi(t)$ sont construites sur la fig. 53 *b*. Les plans des vitesses construits pour déterminer les vitesses du point C correspondant aux positions du point B ne sont pas donnés. Pour la construction de la courbe $v = \varphi(t)$ on a pris comme sens positif de la vitesse du point C le sens de gauche à droite.

Pour construire la courbe $a = \psi(t)$, où a est l'accélération du point C et t le temps, il faut de même construire autant de plans d'accélérations qu'il y a de positions différentes choisies pour le point B. Mais dans ce cas, vu la symétrie des deux branches de la courbe des vitesses par rapport à l'ordonnée moyenne, on peut se limiter seulement à la construction des plans correspondant aux 7 premières positions. La courbe $a = \psi(t)$ est donnée sur la fig. 53 *b* avec les deux courbes précédentes. Les plans des accélérations construits pour déterminer les ordonnées de la courbe $a = \psi(t)$ ne sont pas donnés.

Pendant la construction de cette courbe on a pris comme sens positif des accélérations celui de gauche à droite.

Les courbes des vitesses et des accélérations peuvent être construites sans passer par les plans des vitesses et des accélérations. Puisque la courbe des vitesses est la courbe dérivée première de la courbe des chemins parcourus, elle peut donc être construite par points en dérivant graphiquement la courbe des chemins parcourus. De la même manière, on peut construire la courbe des accélérations qui est la courbe dérivée première de la courbe des vitesses.

On a pris les échelles suivantes sur la fig. 53 *b*.

L'échelle sur l'axe des abscisses pour toutes les courbes est $\mu_t = 0{,}0025$ s/mm (sur la fig. 53 *b*, 100 mm représentent l'intervalle de temps 0,25 s, temps nécessaire à la manivelle pour faire un tour).

Les ordonnées de la courbe $s = f(t)$ sont celles données sur la fig. 53 *a*, et par conséquent, l'échelle des ordonnées de cette courbe est $\mu_S = 10$ mm/mm.

Les ordonnées de la courbe $v = \varphi(t)$ sont portées à l'échelle $\mu_v = 0{,}2$ m/s·mm, les ordonnées de la courbe $a = \psi(t)$ à l'échelle $\mu_a = 7$ m/s²·mm.

On a mentionné plus haut qu'en plus des diagrammes des chemins parcourus, des vitesses et des accélérations pour l'analyse cinématique de certains mécanismes, on doit construire par points la trajectoire de points appartenant à différents chaînons. Prenons pour exemple le mécanisme du pétrin représenté sur la fig. 33. Pour son analyse cinématique, la construction de la trajectoire de points rigidement liés à la bielle de l'organe de travail est nécessaire puisque d'après la forme de ces trajectoires, on détermine

le rendement de la machine. Pendant l'analyse cinématique du mécanisme bielle-manivelle, la nécessité d'envisager les trajectoires de certains points apparaît seulement pour les points liés à la bielle car les trajectoires du point appartenant aux deux autres chaînons mobiles sont, dans un cas, des circonférences et, dans l'autre, des droites. On a donné sur la fig. 53*a* deux exemples de trajectoires rappelant une ellipse (mais qui n'en est pas une) du point de la bielle qui se trouve sur la droite *BC* à égale distance des points *B* et *C*.

16. DÉTERMINATION ANALYTIQUE DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS

Les méthodes graphiques de détermination des vitesses et des accélérations exposées sont simples, évidentes et mènent rapidement au but. Néanmoins, quelle que soit la précision avec laquelle les plans ont été exécutés, on ne doit pas perdre de vue le défaut propre aux méthodes graphiques : il est difficile d'établir la précision des résultats obtenus.

Dans le cas où les calculs doivent particulièrement être précis et si la précision du calcul est donnée d'avance, les chemins parcourus, les vitesses et les accélérations peuvent être déterminés analytiquement. La détermination analytique des chemins parcourus, des vitesses et des accélérations est toujours possible puisqu'un mécanisme, quelle que soit sa position, est une figure fermée dont on connaît toujours suffisamment de données pour déterminer les côtés et les angles. Cependant, les équations auxquelles on aboutit par les méthodes analytiques sont souvent compliquées et très peu commodes au maniement pratique même pour l'analyse de mécanismes très simples.

Au paragraphe précédent, en appliquant les méthodes graphiques, nous avons trouvé trois courbes exprimant respectivement les chemins parcourus, les vitesses et les accélérations du point *C* du mécanisme représenté schématiquement sur la fig. 53*a* en fonction de l'angle de rotation de la manivelle ou en fonction du temps de rotation évalué à partir d'une position initiale. Avec l'application d'une méthode analytique, au lieu de courbes nous aboutissons à des formules qui expriment les mêmes dépendances que celles exprimées par les courbes.

Introduisons pour le mécanisme bielle-manivelle représenté à la fig. 54 les notations suivantes :

φ est l'angle de rotation de la manivelle *AB* évalué à partir de la position initiale AB_0 de la manivelle dans le sens des aiguilles d'une montre ;

l_1 est la longueur de la manivelle AB;
l_2 est la longueur de la bielle BC;
$s=C_0C$ est le chemin parcouru par le point C à partir de la position initiale C_0 pour une rotation d'angle φ de la manivelle.

Pour déterminer les équations de la courbe des chemins parcourus exprimons s en fonction φ:

$$s=C_0C=AC-AC_0=AC-(l_2-l_1);$$
$$AC=KC-KA=\sqrt{l_2^2-l_1^2\sin^2\varphi}-l_1\cos\varphi.$$

En posant $l_2:l_1=p$ et après certaines transformations on trouve:

$$s=l_1(l-\cos\varphi+\sqrt{p^2-\sin^2\varphi}-p).$$

Dans cette équation les chemins parcourus par le point C s'expriment en fonction de l'angle de rotation de la manivelle.

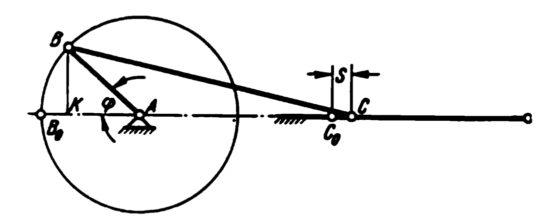


Fig. 54

Si la manivelle est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante à n tours à la minute, l'angle de rotation de la manivelle estimé en radians pour t secondes est

$$\varphi=\frac{\pi n}{30}t=\omega t,$$

où ω est la vitesse angulaire en s^{-1}.

En substituant cette valeur de φ dans la formule obtenue ci-dessus, on en déduit la courbe des chemins parcourus sous la forme

$$s=l_1(l-\cos\omega t+\sqrt{p^2-\sin^2\omega t}-p).$$

En dérivant cette formule, on a après simplification l'expression de la vitesse sous forme de fonction dépendant du temps:

$$\frac{ds}{dt}=v=l_1\left(\sin\omega t-\frac{\sin 2\omega t}{2\sqrt{p^2-\sin^2\omega t}}\right)\omega.$$

En dérivant cette dernière formule, on a après simplification l'expression de l'accélération sous forme de fonction dépendant du temps:

$$\frac{dv}{dt}=a=l_1\left(\cos\omega t-\frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{p^2-\sin^2\omega t}}-\frac{\sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(p^2-\sin^2\omega t)^3}}\right)\omega^2.$$

Nous avons pris pour exemple un mécanisme très simple et dans ce mécanisme nous avons choisi un point pour lequel exception faite des points appartenant à la manivelle, la mise en équation était la plus simple, mais malgré cela les équations obtenues se sont avérées peu commodes pour les applications pratiques. Les équations analogues pour certains points appartenant à la bielle et se trouvant en mouvement suivant la trajectoire donnée par des courbes d'ordre 5 et d'ordres supérieurs auraient été considérablement plus compliquées.

Dans la pratique, lors des calculs, afin d'éviter des équations compliquées, on fait usage de méthodes analytiques de calculs numériques. Par exemple, on peut simplifier de la manière suivante les équations obtenues ci-dessus:

$$\sqrt{p^2-\sin^2\omega t}=p\left[1-\left(\frac{\sin\omega t}{p}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$=p\left(1-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\omega t}{p^2}-\frac{1}{8}\frac{\sin^4\omega t}{p^4}\dots\right).$$

Puisque la série converge rapidement, on peut, sans commettre une grande erreur, négliger les termes à partir du troisième. On a dans ce cas:

$$s=l_1\left(1-\cos\omega t-\frac{\sin^2\omega t}{2p}\right);$$
$$\frac{ds}{dt}=v=l_1\left(\sin\omega t-\frac{\sin 2\omega t}{2p}\right)\omega;$$
$$\frac{dv}{dt}=a=l_1\left(\cos\omega t-\frac{\cos 2\omega t}{p}\right)\omega^2.$$

CHAPITRE III

MÉCANISMES PLANS TRANSMETTANT LE MOUVEMENT DE ROTATION

17. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Les pièces servant à transmettre le mouvement de rotation sont montées sur des arbres qui ne sont autres que des tiges barres, en rotation sur des paliers dans la plupart des cas de forme cylindrique. L'arbre destiné à transmettre le mouvement s'appelle arbre menant; celui qui reçoit le mouvement prend le nom d'arbre mené.

La transmission du mouvement de rotation peut être réalisée entre arbres disposés de manière quelconque dans l'espace: les axes des arbres peuvent être parallèles, se couper sous un angle quelconque et être non coplanaires avec des projections sur un plan se coupant sous un angle quelconque. En pratique, on a affaire, le plus souvent, à des arbres dont les axes sont parallèles, mais, néanmoins, plus rarement, à des arbres, dont les axes sont concourants et se coupent sous un angle droit ou sont non coplanaires avec des projections sur un plan se coupant suivant un angle droit. Nous considérerons dans la suite seulement ces cas, les autres étant moins fréquents en pratique.

La transmission du mouvement de rotation entre arbres dont les axes sont parallèles est réalisée à l'aide de mécanismes plans. Pour les autres cas, on a recours à des mécanismes spaciaux ou gauches.

La transmission du mouvement de rotation se fait d'après l'une des méthodes suivantes:

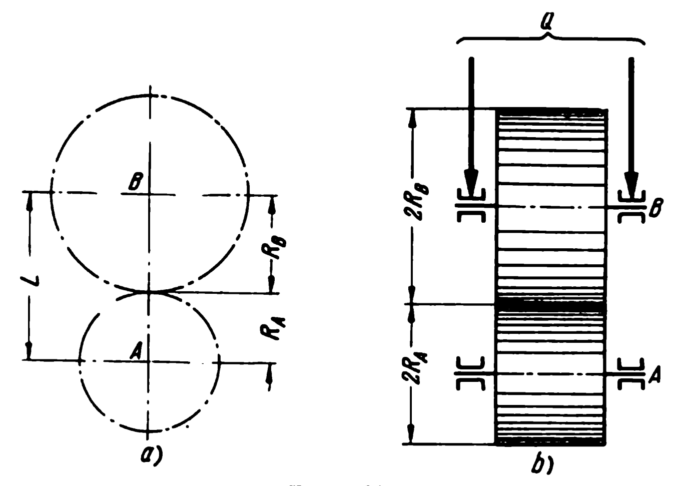
1) par le contact direct de deux corps, l'un d'eux étant monté de manière rigide sur l'arbre menant, l'autre sur l'arbre mené;

2) par l'intermédiaire de deux corps flexibles adhérant à des corps montés rigidement sur les arbres menant et mené.

La première de ces méthodes est réalisée dans les transmissions par friction, à roues dentées, et à vis sans fin; la seconde, dans les transmissions à courroie et à chaînes.

La transmission du mouvement de rotation peut être réalisée avec augmentation, diminution ou conservation de la vitesse angulaire.

Le rapport des vitesses angulaires des deux arbres est appelé r a p p o r t d e t r a n s m i s s i o n. Le rapport de transmission peut donc s'exprimer à l'aide du rapport des vitesses angulaires de l'arbre menant et de l'arbre mené ou inversement.



F i g. 55

Le rapport de transmission dans le sens du flux de force, c'est-à-dire le rapport des vitesses angulaires des arbres menant et mené, s'appelle n o m b r e d e t r a n s m i s s i o n[1].

Pendant le temps nécessaire à l'arbre menant pour accomplir un tour complet, le rapport de transmission peut varier ou rester invariable. En pratique, on rencontre rarement des mécanismes à rapport de transmission variable (pendant l'intervalle de temps nécessaire à l'arbre menant pour accomplir un tour complet) transmettant le mouvement de rotation ; c'est pourquoi, dans la suite, nous n'étudierons pas ces mécanismes.

Si la transmission du mouvement de rotation entre arbres à axes parallèles est réalisée directement par le contact de deux corps, chacun étant lié à son arbre, alors on peut se représenter des cylindres en contact adjoints à ces arbres qui, tout en étant animés d'un mouvement de rotation autour des axes *A* et *B*, communs aux arbres et aux cylindres (fig. 55 *a*), et étant constamment

[1] Dans certaines publications très répandues, par nombre de transmission on a en vue le rapport de transmission supérieur ou égal à l'unité.

en contact, ne glissent pas l'un sur l'autre. Ces cylindres imaginaires en contact s'appellent cylindres primitifs. Les cercles sections droites de ces cylindres par un plan perpendiculaire aux axes des cylindres s'appellent aussi cercles primitifs.

Pendant la rotation des cylindres primitifs, le glissement d'un cylindre sur l'autre n'aura pas lieu tant que les vitesses linéaires des points appartenant aux surfaces latérales des cylindres sont égales, c'est-à-dire si la condition

$$R_A \cdot \omega_A = R_B \cdot \omega_B$$

est satisfaite, où R_A et R_B sont les rayons de base des cylindres; ω_A et ω_B les vitesses angulaires des cylindres primitifs. Il découle de cette égalité que

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = i.$$

Par conséquent, le rapport de transmission peut s'exprimer par le rapport des rayons des cylindres primitifs.

On commence le plan de construction d'une transmission de mouvement de rotation entre deux arbres parallèles en traçant d'abord les deux cercles primitifs. D'après le rapport de transmission et la distance entre les centres (c'est-à-dire la distance L entre les centres des cercles primitifs), on calcule les rayons des cercles primitifs en résolvant le système des deux équations suivantes :

$$\frac{R_B}{R_A} = i ;$$

$$R_A + R_B = L.$$

Il découle de ce qui a été exposé ci-dessus que le point de tangence des circonférences primitives partage la droite des centres (c'est-à-dire le segment AB) en parties inversement proportionnelles aux vitesses angulaires des arbres.

18. TRANSMISSION PAR FRICTION

Sous sa forme la plus simple, une transmission plane du mouvement de rotation est réalisée en associant aux arbres menant et mené des cylindres dont les rayons sont égaux aux rayons des cylindres primitifs et en mettant ces cylindres en contact l'un avec l'autre. Cette transmission est représentée sur la fig. 55 *b*, où A est l'arbre qui tourne sur des paliers fixes ; B est l'arbre qui tourne sur des paliers pouvant se déplacer dans la direction perpendiculaire aux axes des arbres ; Q est la force agissant sur

les paliers de l'arbre B et appliquant les cylindres de rayons R_A et R_B l'un sur l'autre.

Pour des cylindres appliqués l'un sur l'autre, sur la ligne de contact (plus précisément, sur une étroite portion de surface contenant la ligne de contact, conséquence de la déformation des cylindres) se crée une force de frottement par l'intermédiaire de laquelle le mouvement de rotation de l'arbre menant est transmis à l'arbre mené. La transmission du mouvement de rotation peut se réaliser sans glissement d'un cylindre sur l'autre, et par conséquent, avec un rapport de transmission égal au rapport des rayons des cylindres si la force d'application Q assure une force de frottement suffisante. Cette transmission s'appelle transmission par friction.

L'utilisation de la force de frottement pour l'engrènement de roues montées rigidement sur des arbres, appelées r o u l e a u x, permet de réaliser dans la transmission par friction une transmission simple, et par conséquent, peu coûteuse, ce qui a une grande importance dans les installations industrielles. Le grand avantage de la transmission par friction réside dans son fonctionnement sans bruit et dans le fait que pendant les variations subites des charges sur l'arbre mené, c'est-à-dire lors de grands et brusques accroissements de la résistance de l'arbre mené à la rotation, il ne se produit pas de détériorations des pièces de la transmission, car dans ce cas on n'observe que des glissements de courte durée des rouleaux qui ne leur causent aucun dommage.

Cependant, le dernier des avantages cités de la transmission par friction est en même temps un inconvénient qui empêche d'appliquer la transmission par friction dans de nombreux cas. Le glissement éventuel d'un rouleau sur l'autre ne permet pas d'appliquer la transmission par friction dans les cas où le rapport de transmission constant est une condition nécessaire du fonctionnement régulier de la machine. Ces cas-là sont fréquents en pratique. Quand on donne une estimation de ces défauts de la transmission par friction, il faut avoir encore en vue que le glissement d'une roue sur l'autre peut s'effectuer non seulement par l'augmentation de la résistance due à la rotation de l'arbre mené, mais aussi à la diminution de la force de frottement entre les rouleaux. La diminution de la force de frottement peut résulter soit de la diminution de la force de pression d'un rouleau sur l'autre, soit encore de la réduction du coefficient de frottement entre les jantes des rouleaux, par exemple, due à l'effet de l'huile de graissage qui se trouve accidentellement sur les jantes des rouleaux.

Un autre défaut sérieux de la transmission par friction est la présence du dispositif assurant l'adhérence d'un rouleau sur

l'autre; et, en outre, cette force d'adhérence est perçue dans les paliers des arbres, ce qui a pour conséquence l'apparition de forces de frottement dans ces derniers. Ces forces de frottement sont surmontées en dépensant le travail des forces en mouvement.

On parvient à réduire l'action de la force sur les arbres qui applique les rouleaux l'un sur l'autre seulement dans les transmissions par friction composées que nous n'étudierons pas (ces transmissions sont étudiées dans le cours des pièces de machines), mais dans la transmission par friction simple réalisée par une paire de roues, on peut prendre des mesures qui ne font qu'atténuer le défaut indiqué. A cet effet, on fabrique les jantes des rouleaux métalliques (en fonte) très souvent en matériaux non métalliques (caoutchouc, cuir, bois et autres), ce qui permet d'obtenir la force de frottement nécessaire aux petites forces d'adhérence et, par conséquent, aux petites pertes en frottement dans les paliers des arbres.

Les défauts de la transmission par friction, qu'on vient d'indiquer, ont pour conséquence que pour transmettre le mouvement de rotation entre arbres parallèles, on fait appel plus fréquemment aux transmissions par engrenages.

19. TRANSMISSION PAR ENGRENAGES

A. Considérations générales

On réalise la transmission par engrenages à l'aide d'une paire de roues munies de dents disposées sur la surface latérale des cylindres circulaires. Sur la fig. 56, on a donné en coupe transversale la disposition réciproque des dents d'une paire de roues conjuguées et on a mené les cercles primitifs de centres O_1 et O_2. Quand la roue menante est animée d'un mouvement de rotation, une de ses dents en exerçant une pression sur une des dents de la roue menée, entraîne cette dernière en lui communiquant le mouvement de rotation. Jusqu'à désengrènement d'une paire de dents, une autre paire de dents s'engrène, ce qui permet aux roues d'être animées d'un mouvement de rotation continu. Il existe des engrenages pour lesquels une à trois paires de dents peuvent se trouver simultanément en engrènement.

On a indiqué sur la fig. 56 la disposition réciproque d'une paire de dents à engrènement extérieur où les centres des cercles primitifs se trouvent de part et d'autre du point de tangence. On utilise également les engrenages à engrènement intérieur où les centres des cercles primitifs se trouvent d'un même côté du point de tangence (fig. 57).

Dans les engrenages à engrènement extérieur, les dents de chaque roue sont disposées sur la face extérieure de la jante; dans les engrenages à engrènement intérieur, les dents de la grande roue sont disposées sur la face intérieure de la jante. Pour les engrenages à engrènement extérieur, les roues sont animées de

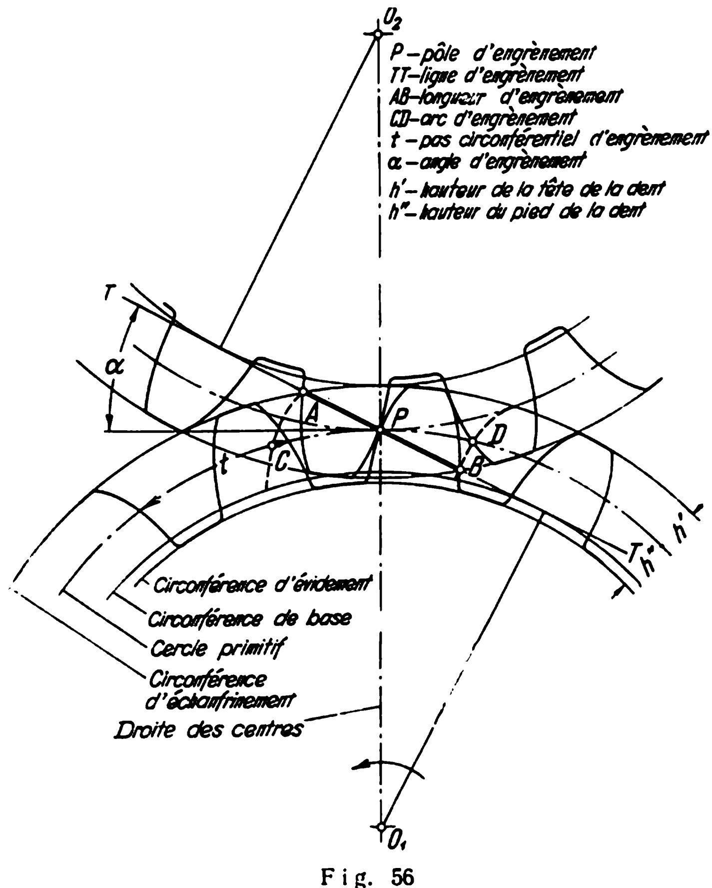


Fig. 56

mouvements de rotation en sens contraires, tandis que pour les engrenages à engrènement intérieur, les roues sont animées de mouvements de rotation dans le même sens. Dans la suite, nous étudierons seulement les engrenages à engrènement extérieur, les engrenages à engrènement intérieur étant relativement peu appliqués.

Les surfaces latérales profilées des dents sont limitées par des surfaces gauches qui assurent un rapport de transmission constant pendant le processus d'engrènement d'une paire de dents.

La courbe suivant laquelle, comme suivant une génératrice, on construit la surface latérale de la dent, s'appelle profil de la dent.

Pour que les dents de la roue menante pendant la rotation des roues tombent constamment dans les intervalles des dents successives de la roue menée, il faut que la distance entre les milieux des dents successives, mesurée suivant la circonférence primitive d'une des roues, soit égale à cette même distance pour l'autre roue. Cette distance est appelée **pas circonférentiel** de l'engrenage et on la note par la lettre latine t.

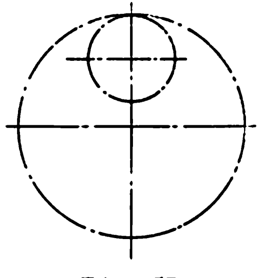


Fig. 57

Le pas circonférentiel d'un engrenage peut également être mesuré suivant la circonférence primitive entre les profils tournés du même côté des dents successives.

En désignant par z le nombre de dents de la roue, par d — le diamètre du cercle primitif et en exprimant la longueur de la circonférence primitive à l'aide du diamètre d'une part, et du nombre de dents, d'autre part, on aboutit à l'égalité

$$\pi \cdot d = z \cdot t,$$

d'où

$$d = z \frac{t}{\pi}.$$

Cette égalité montre que le diamètre et le pas circonférentiel ne peuvent pas s'exprimer à l'aide de nombres commensurables.

Il est plus avantageux, quant à la fabrication des roues dentées, de choisir le rapport $\frac{t}{\pi}$ de manière qu'il s'exprime soit à l'aide de nombres entiers, soit encore par des nombres entiers suivis de décimales en nombres restreints.

Le rapport $\frac{t}{\pi}$ s'appelle **module de l'engrenage**, et on le note par la lettre latine minuscule m.

Pour éviter d'avoir une gamme étendue d'instruments de taillage, le standard d'Etat d'Union Soviétique a établi, pour les usines de construction des machines produisant des roues dentées, deux séries de modules jusqu'auxquels on doit arrondir les modules obtenus par les calculs. On a prévu dans la première série les modules suivants en mm: 0,05; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100. On a prévu dans la seconde série des modules intermédiaires aux modules de la première série, tels que 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9; 11 mm et autres.

On montrera ci-dessous que si les profils des dents sont exécutés correctement, la distance O_1O_2 entre les centres (voir fig. 56) peut, lors du montage de la roue, être modifiée légèrement tout en conservant le même rapport de transmission. Remarquons que les rayons des cercles primitifs changent également.

Par conséquent, une même paire de roues dentées peut être montée différemment puisque les roues fonctionneront pour divers diamètres des cercles primitifs et par suite, pour différents rapports $\frac{t}{\pi}$. Il est évident que les modules standards ne se rapportent qu'à une paire possible de cercles primitifs. Ils se rapportent à des cercles dits cercles diviseurs.

On appelle cercle diviseur d'un engrenage un cercle imaginaire de diamètre zm, où z est le nombre de dents de la roue et m, le module standard.

Il découle de ce qui vient d'être exposé que le cercle diviseur peut coïncider avec le cercle primitif (ce qui a lieu fréquemment), mais peut aussi ne pas coïncider. La notion de cercle diviseur est nécessaire non seulement parce que l'on a à considérer son diamètre, quand on exécute la roue, mais aussi parce que le terme «cercle primitif» n'aurait pas de sens dans le cas d'une roue unique, vu que les cercles primitifs interviennent dans le cas de l'engrènement de deux roues.

Le diamètre de la roue, donné par le calcul, est pris comme diamètre du cercle diviseur. Le cercle diviseur partage la dent en deux parties: la partie de la dent qui se trouve au-delà du cercle diviseur, qui pour les roues à engrènement extérieur (et en deçà du cercle diviseur pour les roues extérieures dans un engrenage à engrènement intérieur) s'appelle tête h' de la dent; la partie de la dent qui se trouve entre le cercle diviseur et le bâti de la roue s'appelle pied ou racine h'' de la dent. Lorsque le cercle primitif ne coïncide pas avec le cercle diviseur, conformément au standard, la dent est partagée en tête et en pied non par rapport au cercle diviseur, mais par rapport au cercle primitif.

Les dimensions des dents normales sont les suivantes: la hauteur de la tête doit être égale au module, la hauteur du pied à 1,25 module. Dans certains cas, on utilise des roues avec des dents raccourcies, c'est-à-dire avec des dents dont la hauteur de la tête est égale à 0,8 module et la hauteur du pied au module. L'épaisseur de la dent mesurée suivant le cercle diviseur est prise égale à la moitié du pas circonférentiel.

Le module de l'engrenage se détermine d'après les calculs à la résistance et à l'usure exposés dans le cours des pièces de machines.

La circonférence ayant pour centre le centre de la roue et qui limite extérieurement l'engrenage s'appelle cercle d'échanfrinement ou de tête.

L'intervalle entre les profils des dents successives, limité par la circonférence d'échanfrinement et le bâti de la roue, s'appelle intervalle entre deux dents successives ou creux. La circonférence décrite à partir du centre de la roue et qui limite intérieurement les intervalles entre les dents s'appelle circonférence d'évidement, de pied ou racine.

B. Transmissions composées

Sous sa forme la plus simple, la transmission à roues dentées est constituée par une roue menante et par une roue menée se trouvant en engrènement et montées rigidement sur des arbres en rotation autour d'un axe fixe.

Les transmissions composées sont nécessaires lorsque le rapport de transmission dépasse une certaine limite permise que l'on peut

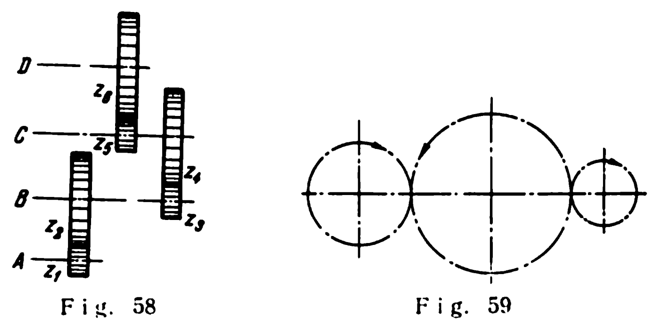


Fig. 58 Fig. 59

obtenir en pratique par l'intermédiaire d'une paire de roues. Dans ce cas, on a recours à des dispositifs de transmission à plusieurs étages: on place entre les arbres menant et mené un ou plusieurs arbres intermédiaires (fig. 58), et le mouvement de rotation est transmis successivement d'un arbre à l'autre. Dans cette transmission, sur chaque arbre intermédiaire (arbres B et C sur la fig. 58), on monte deux roues dont l'une est menée, recevant le mouvement de l'arbre précédent, et l'autre menant, transmettant le mouvement à l'arbre suivant. Cette transmission peut réaliser un rapport de transmission élevé.

En désignant la vitesse angulaire des arbres par la lettre ω avec l'indice correspondant, les rapports de transmission par la lettre i avec deux indices, le premier indiquant l'arbre menant, le second l'arbre mené, le nombre de dents des roues par la lettre

z avec les indices indiqués sur la fig. 58 et en supposant l'arbre A menant, l'arbre D mené et en tenant compte que dans une transmission par engrenages le nombre de transmission peut s'exprimer à l'aide du rapport du nombre de dents des roues, puisque le diamètre de la roue est le produit du module par le nombre de dents, on trouve:

$$i_{AB}=\frac{\omega A}{\omega B}=\frac{z_2}{z_1};$$

$$i_{BC}=\frac{\omega B}{\omega C}=\frac{z_4}{z_3};$$

$$i_{CD}=\frac{\omega C}{\omega D}=\frac{z_6}{z_5}.$$

En multipliant ces égalités, on trouve après simplification

$$i_{AB}\cdot i_{BC}\cdot i_{CD}=i_{AD}=i=\frac{z_2\cdot z_4\cdot z_6}{z_1\cdot z_3\cdot z_5}.$$

Par conséquent, dans une transmission à arbres intermédiaires sur chacun desquels on a monté des roues menante et menée, le nombre de transmission total i ou raison totale du train est égal au produit des nombres de transmission intermédiaires ou au rapport des produits du nombre de dents des roues menées au produit des nombres de dents des roues menantes (fig. 58, les indices pairs indiquent les roues menées, les indices impairs, les roues menantes).

On a représenté sur la fig. 58 seulement deux arbres intermédiaires, mais la conclusion à laquelle on vient d'aboutir reste valable pour un nombre quelconque d'arbres intermédiaires.

Pour de petits nombres de transmission obtenus à l'aide d'une paire de roues, on doit avoir recours à un dispositif de transmission composée au cas où la transmission du mouvement de rotation doit être réalisée en conservant le sens de rotation. Si on veut que les roues menante et menée soient en rotation dans un même sens, on place alors entre elles une roue intermédiaire (parasitaire) s'engrenant avec les roues menantes et menées (fig. 59).

Les roues intermédiaires peuvent être montées aussi dans le cas où la distance entre les axes de la roue menante et de la roue menée est trop grande, tandis que certaines considérations de construction interdisent l'utilisation des roues à grand diamètre (fig. 60). En supposant que la roue menante a z_1 dents (fig. 60) et la roue menée z_4 dents, on détermine la raison totale du train; on trouve qu'elle est égale à $\frac{z_4}{z_1}$, c'est-à-dire celle de la transmission sans roue intermédiaire. Par conséquent, dans les transmissions par roues intermédiaires, ni le nombre de roues, ni le nombre

de dents n'ont d'influence sur la valeur du nombre de transmission total. Le nombre de roues intermédiaires est pris impair si la roue menée doit avoir un mouvement de rotation dans le même sens que la roue menante, et pair dans le cas contraire.

Nous avons supposé que les axes menant et mené des roues étaient fixes. Cependant, on applique souvent des mécanismes à roues dentées où les axes de plusieurs roues sont mobiles. On donne sur la fig. 61 le schéma d'un de ces mécanismes à engrenages, les plus simples, constitué par les roues dentées P et C

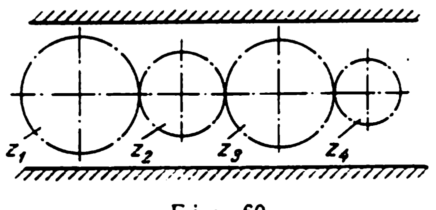


Fig. 60

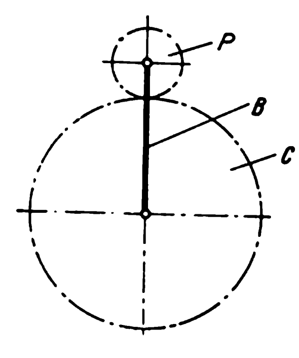


Fig. 61

et par le levier B appelé guidonnage. Si la roue C était fixe, pendant le temps nécessaire au guidonnage B pour accomplir un tour, la roue P tournerait autour de son axe à $\frac{zC}{zP}$ tours, où zP et zC sont les nombres de dents des roues P et C, en outre, elle accomplit encore un tour autour de l'axe du guidonnage. Le rapport de transmission du guidonnage à la roue P sera donc

$$\frac{zC}{zP}+1.$$

Sous cette forme, ce mécanisme est fréquemment appliqué dans les appareils où les substances réagissantes doivent être malaxées énergiquement. Dans ces appareils, les organes de travail (palettes des brassoirs ou hélices), qui agissent directement sur les matériaux à traiter, sont montés sur les arbres de plusieurs (ordinairement trois) roues C.

Pour la roue fixe C, représentée sur la fig. 61, le mécanisme s'appelle m é c a n i s m e p l a n é t a i r e, la roue C s'appelle roue planétaire, la roue P, roue satellite. Par un calcul facile, on peut voir que ce mécanisme jouit d'un degré de mobilité (deux chaînons mobiles B et P, deux couples de rotation et un couple supérieur).

Dans le cas d'une roue mobile *C*, le mécanisme jouit de deux degrés de mobilité et s'appelle mécanisme à roues dentées différentiel.

C. Théorie de l'engrènement

Le fonctionnement des roues dentées dépend dans une grande mesure du soin apporté à l'exécution des profils des dents. Avant d'expliquer le choix des courbes suivant lesquelles on doit effectuer le tracé des profils, décelons la principale exigence que l'on doit imposer à ces courbes.

Nous savons que pendant la rotation des roues dentées en engrènement, les cercles primitifs roulent l'un sur l'autre sans glisser. Cette condition peut être satisfaite seulement au cas où pendant le processus de l'engrènement le profil de la dent de la roue menante est constamment en contact avec le profil de la dent de la roue menée.

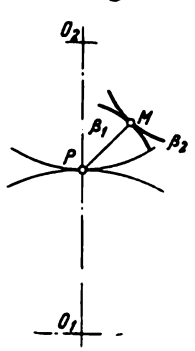


Fig. 62

Soient O_1 et O_2 (fig. 62) les centres respectifs des cercles primitifs des première et deuxième roues ; P — le point de tangence des circonférences primitives appelé pôle d'engrènement; β_1 — le profil de la dent de la première roue ; β_2 — le profil de la dent de la deuxième roue; M — le point de tangence des profils à l'instant correspondant à la position réciproque des profils donnés sur la figure.

Considérons le mouvement d'une roue, par exemple, le mouvement de la deuxième par rapport à la première. Pendant le roulement du cercle de centre O_2 sur le cercle de centre O_1, la circonférence de centre O_2 et le profil β_2 qui lui est fixé rigidement sont à l'instant considéré animés d'un mouvement de rotation autour du pôle P, centre instantané de rotation. Au point M se réalise le contact du point M_1 appartenant au profil β_1 et du point M_2 appartenant au profil β_2. Lorsque le profil β_2 est en rotation autour du pôle P, la vitesse du point M_2 par rapport au point M_1, pour le fonctionnement régulier des roues, ne peut être dirigée que suivant la tangente commune aux deux profils au point M, sans quoi le profil β_2 se séparerait du profil β_1 ou encore viendrait s'écraser sur lui. Le vecteur vitesse du point M_2 par rapport au point M_1 porté par la tangente commune aux deux profils est perpendiculaire à la droite PM en tant que rayon de rotation.

D'après ce qui vient d'être dit, on peut énoncer la condition importante que doivent satisfaire les profils des dents se trouvant en engrènement : la normale au point de tangence des profils doit passer par le pôle d'engrènement.

On peut construire de nombreux profils vérifiant cette condition pour chaque cas considéré en se donnant un profil de dent presque arbitraire pour une des roues et en construisant le profil conjugué pour la dent de l'autre roue. Or, en pratique, quand on projette un engrenage, on ne procède jamais ainsi. On trace les profils d'après des courbes mathématiques. Les procédés de construction des profils conjugués pour des profils arbitrairement donnés ne seront pas étudiés.

Historiquement, les premières courbes mathématiques qui servirent au tracé des profils de dents furent des courbes cylindriques (cycloïde, épicycloïde, hypocycloïde, péricycloïde). Théoriquement, les profils cycliques jouissent de grands avantages, mais les difficultés auxquelles on se heurte pour exécuter exactement les dents cycliques ont fait renoncer à la fabrication des roues à dents cycliques. A l'heure actuelle, les roues dentées ne sont fabriquées qu'avec des profils à développante.

Pour évaluer à leur juste valeur les avantages des profils à développante, il nous faut préalablement étudier les propriétés des développantes dont on a besoin pour les engrenages.

On appelle développante de cercle la courbe décrite par un point d'une droite qui roule sans glisser sur une circonférence. La circonférence sur laquelle roule la droite, dont l'un des points décrit la développante, s'appelle circonférence de base; la droite qui roule sur la circonférence de base s'appelle droite génératrice.

Une des propriétés des plus importantes de la développante est la suivante: *la droite génératrice est la normale à la développante.*

On peut s'en convaincre très simplement en se rapportant à la fig. 63. Le point A de la droite génératrice AB est le centre instantané de rotation et le segment de droite AB le rayon vecteur du centre instantané de rotation relatif au point B qui décrit la développante; le segment de droite AB est la normale en ce point à la développante puisqu'il est perpendiculaire au vecteur vitesse de ce point porté par la tangente à la courbe.

Considérons (fig. 64) la développante CAB, rigidement liée à la circonférence de base, et la tangente TT à la circonférence de base qui coupe la développante au point A. Prenons un point B sur la développante; le segment de droite BB_1 appartient à la droite génératrice.

Il découle de la définition de la développante que la longueur du segment de droite AA_1 est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{CA_1}$ et que la longueur du segment BB_1 est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{CB_1}$. Si l'on garde la droite TT immobile, et si on fait

tourner d'un angle α la circonférence de base et la développante qui lui est rigidement fixée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de manière que le point B_1 coïncide avec le point A_1, la développante prend alors la position C_1B_2 et le segment de droite BB_1 coïncide avec le segment B_2A_1 de la droite TT.

Avant que ne pivotent la circonférence de base et la développante, le point d'intersection de la développante avec la droite TT occupe la position A; pendant la rotation, il se déplace sur la droite TT parcourant ainsi la distance AB_2. Le chemin AB_2

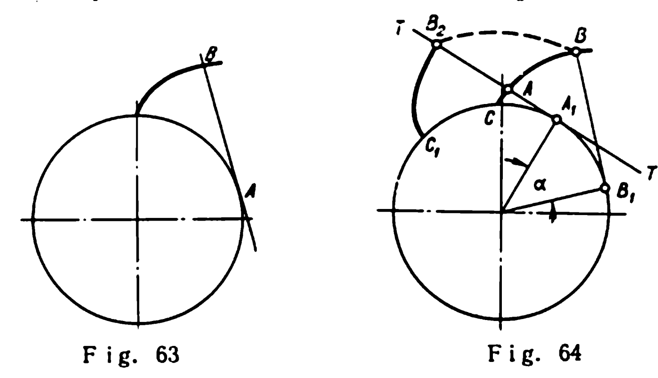


Fig. 63 Fig. 64

parcouru par le point d'intersection de la développante et de la droite TT pendant la rotation de la circonférence de base est égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{B_1A_1}$ sur lequel le point B_1 s'est déplacé. Donc,

$$AB_2 = A_1B_2 - AA_1 = BB_1 - AA_1 = \overset{\frown}{CB_1} - \overset{\frown}{CA_1} = \overset{\frown}{B_1A_1}.$$

Il en découle que pendant la rotation de la circonférence de base et de la développante autour du centre de la circonférence de base, la vitesse linéaire du point d'intersection de la développante et d'une tangente arbitraire à la circonférence de base (dans le sens de cette tangente) est égale à la vitesse linéaire des points appartenant à la circonférence de base. Cette propriété de la développante permet de transformer le mouvement de rotation à vitesse angulaire constante en mouvement de translation à vitesse linéaire constante et inversement. Pour cela, on a recours à un mécanisme à came ordinaire dont la came serait tracée d'après la développante. Ce mécanisme est représenté schématiquement sur la fig. 65, où β est le profil à développante de la came en rotation autour du centre de la circonférence de base; K — la circonférence de base de la développante β; T — le poussoir guidé par le manchon B suivant la tangente à la circonfé-

rence de base. Pendant la rotation de la came avec une vitesse angulaire constante en sens inverse des aiguilles d'une montre, le profil de la développante refoule le poussoir vers le haut avec une vitesse linéaire constante et réciproquement, pendant le mouvement du poussoir vers le bas avec une vitesse linéaire constante, la came est animée d'un mouvement de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante. Conformément à ce qui a été dit, la vitesse linéaire du poussoir est liée à la vitesse angulaire de la came d'après la formule suivante:

$$v = r_0 \cdot \omega,$$

où v est la vitesse linéaire du poussoir, ω — la vitesse angulaire de la came, r_0 — le rayon de la circonférence de base.

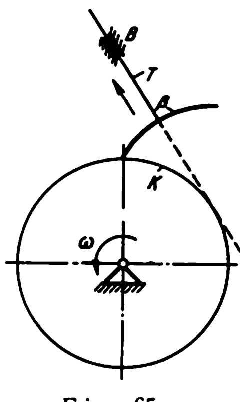


Fig. 65

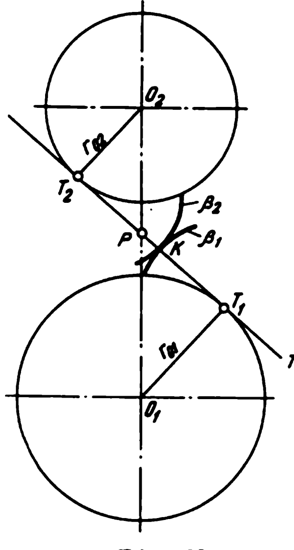


Fig. 66

Représentons-nous (fig. 66) deux cames à profils à développantes β_1 et β_2 en contact et qui sont respectivement en rotation autour des centres fixes O_1 et O_2. La tangente commune TT aux circonférences de base est la droite génératrice aux deux profils, et, par conséquent, elle est normale à chacun des profils et doit passer par leur point de tangence.

Faisons tourner le profil β_1 en sens inverse des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante ω_1. Le profil β_1 entraîne le profil β_2 en mouvement de rotation (ainsi que la circonférence de base) autour du centre O_2 dans le sens des aiguilles d'une montre. En outre, lors de l'interaction des profils, le point de tangence est constamment porté par la tangente TT. Le point d'intersection du profil β_1 avec la droite TT se déplace sur cette

droite avec une vitesse linéaire $\omega_1 r_{01}$, tandis que le point d'intersection du profil β_2 avec la droite TT se déplace avec une vitesse linéaire $\omega_2 r_{02}$, où r_{01} et r_{02} sont les rayons des circonférences de base. Or, ces deux vitesses étant égales, sinon les profils s'écarteraient l'un de l'autre ou s'écraseraient l'un contre l'autre, on obtient alors l'égalité

$$\omega_1 r_{01} = \omega_2 r_{02},$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i = \frac{r_{02}}{r_{01}}.$$

Par conséquent, le rapport des rayons des circonférences de base est égal au rapport de transmission.

La came menante à profil à dévoloppante en rotation avec une vitesse angulaire constante ne peut entraîner dans un mouvement de rotation la came menée de même profil que pour une portion de tour relativement petite, tant que les deux cames se trouvent en engrènement. La transmission du mouvement de rotation se fait continûment si, autour des axes de rotation des deux cames, on intercale plusieurs cames de manière qu'au moment du désengrènement d'une paire de cames la paire de cames suivante entre en engrènement. En agissant ainsi, nous obtenons la paire de roues dentées conjuguées dont l'action mutuelle des dents ne diffère en rien de l'interaction des cames conjuguées représentées sur la fig. 66.

Nous avons établi plus haut que, pour des profils de dents à développante, le profil de la dent menante poussera le profil de la dent menée suivant la direction de la tangente commune aux circonférences de base des deux profils avec une vitesse linéaire égale à celle des points appartenant aux deux circonférences de base, ce qui a pour conséquence de donner un rapport de transmission égal au rapport des rayons des circonférences de base.

Nous avons également établi que la tangente commune aux circonférences de base est le lieu géométrique des points de contact des profils à développante et est la normale commune aux profils au point de contact.

Il nous reste encore à établir que la normale commune aux profils au point de tangence passe par le pôle d'engrènement, c'est-à-dire pour des profils à développante la condition fondamentale nécessaire au fonctionnement régulier des roues dentées, établie précédemment, est vérifiée.

Menons sur la fig. 66 les rayons O_1T_1 et O_2T_2, où T_1 et T_2 sont les points de tangence de la droite TT avec les circonféren-

ces de base, et désignons par P le point d'intersection des droites TT et O_1O_2. Le segment de droite O_1O_2 s'appelle droite des centres. Il découle de la similitude des triangles O_1PT_1 et O_2PT_2 que le rapport des segments O_1P et O_2P est égal au rapport des rayons O_1T_1 et O_2T_2 des circonférences de base et est égal au rapport de transmission.

Par conséquent, O_1P et O_2P sont les rayons des cercles primitifs et le point P par lequel passe la normale commune aux profils au point de tangence, est le pôle d'engrènement.

La tangente commune TT aux cercles de base qui est aussi le lieu géométrique des points de tangence des profils conjugués des dents s'appelle ligne d'engrènement.

En se basant sur tout ce qui a été exposé précédemment, nous pouvons à présent, connaissant la distance des centres O_1O_2 et les nombres de dents z_1 et z_2, exécuter le tracé des dents de chaque roue en procédant de la manière suivante:

1) divisons le segment O_1O_2 par le point P dans le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ (voir fig. 56), définissant ainsi les rayons O_1P et O_2P des cercles primitifs;

2) déterminons le module d'engrènement (d'après les calculs à la résistance);

3) menons les circonférences d'échanfrinement et d'évidement en faisant attention à ce que le rayon de la première circonférence soit égal au rayon de la circonférence primitive augmenté du module, tandis que le rayon de la seconde soit égal au rayon du cercle primitif diminué de 1,25 module;

4) menons par le pôle P la ligne d'engrènement formant un certain angle avec la droite O_1O_2 des centres;

5) menons du centre du cercle primitif la perpendiculaire à la ligne d'engrènement tout en déterminant la longueur du rayon de la circonférence de base et menons cette circonférence;

6) en faisant rouler sans glisser dans les deux sens la ligne d'engrènement sur la circonférence de base, le point P décrit une portion du profil à développante qui se trouve comprise entre la circonférence de base et la circonférence d'échanfrinement; la portion restante du profil qui ne sert pas à l'engrènement peut être prolongée à l'aide d'une courbe presque arbitraire;

7) en portant à partir de la circonférence primitive l'épaisseur de la dent, nous construisons le profil qui limite la dent de l'autre côté; ce dernier profil, comme il est évident, doit être l'image par réflexion du premier;

8) après avoir divisé la circonférence primitive à partir du point P en un nombre de parties égal au nombre de dents, on trace les profils et les autres dents de la roue.

L'angle formé par la droite des centres et la ligne d'engrènement n'est pas de moindre importance quand on fait le projet de roues dentées. Cet angle n'a pas de nom spécial, mais l'angle complémentaire, c'est-à-dire l'angle formé par la ligne d'engrènement et la perpendiculaire à la droite des centres, s'appelle angle d'engrènement α (voir fig. 56).

En résultat du calcul des dents à la résistance et à l'usure (les méthodes de ces calculs se trouvent dans le cours des pièces de machines) on trouve la valeur indispensable du module d'engrènement. Pour un module déterminé, il est souvent désirable et dans certains cas indispensable de prendre pour les roues le plus petit nombre possible de dents. Un tel engrenage aura de petites dimensions et sa production reviendra à meilleur marché. Mais, plus le nombre de dents d'une roue est petit, plus il est difficile de réaliser la condition nécessaire du fonctionnement régulier des dents, condition exprimant qu'avant le désengrènement d'une paire de dents la paire suivante de dents entre en engrènement. Cette condition, comme cas limite, sera réalisée dans le cas où l'arc dit d'engrènement, ou le chemin parcouru par un point arbitraire de la circonférence primitive pendant la durée de l'engrènement d'une paire de dents, est égal au pas circonférentiel de l'engrenage. Dans ce cas, il est évident que les instants de désengrènement d'une paire de dents et d'engrènement de la paire suivante de dents coïncident. Pour le projet d'un engrenage, on prévoit que chaque paire suivante de dents s'engrène non pas à l'instant même du désengrènement de la paire précédente, mais avant, c'est-à-dire de manière que l'arc d'engrènement soit plus grand que le pas circonférentiel. Le rapport de l'arc d'engrènement au pas circonférentiel de l'engrenage s'appelle coefficient de recoupement et on le note par la lettre ε. Le coefficient de recoupement caractérise la régularité avec laquelle s'accomplit l'engrènement : plus ce coefficient est grand, plus est régulier le fonctionnement de l'engrenage, toutes autres conditions restant égales.

L'augmentation de l'angle d'engrènement entraîne la diminution de l'arc d'engrènement, et par conséquent, la diminution du coefficient de recoupement. Ainsi, pour assurer une plus grande régularité de fonctionnement de l'engrenage, l'angle d'engrènement doit être choisi le plus petit possible. Mais la diminution de l'angle d'engrènement entraîne l'augmentation rapide du nombre minimum nécessaire de dents de la petite roue ; donc, pour diminuer les dimensions de la roue, et, par conséquent, pour obtenir un engrenage moins coûteux, l'angle d'engrènement doit être choisi le plus grand possible. En se basant sur ces considérations opposées, il faut établir un angle d'engrènement qui ne présenterait pas

d'inconvénients pour fournir des engrenages dont les coefficients de recoupement seraient suffisants, d'une part, et ne nécessiterait pas un trop grand nombre de dents, d'autre part. En U.R.S.S., le standard a établi à 20° la valeur de l'angle d'engrènement; pour cet angle d'engrènement, on fabrique les outils de taillage.

L'influence de l'angle d'engrènement sur la longueur de l'arc d'engrènement est indiquée sur la fig. 56. Quand la roue menante de centre O_1 est en rotation en sens inverse des aiguilles d'une montre, l'engrènement débute au point *B* et l'arc d'engrènement au point *D* où le profil de la dent de la roue menante coupe la circonférence primitive à l'instant initial de l'engrènement. L'engrènement commence au point *B* parce que en ce point le profil de la dent menante entre en contact avec le point extrême du profil de la dent de la roue menée appartenant à la circonférence d'échanfrinement de cette roue (sur la fig. 56 le point *B* coïncide avec le profil droit de la dent de la roue menante; cette coïncidence est accidentelle). L'engrènement se termine au point *A*, point d'intersection de la ligne d'engrènement avec la circonférence d'échanfrinement de la roue menante. L'arc d'engrènement se termine au point *C*, où l'on a mené en pointillé le profil de la dent menante qui coupe la circonférence primitive au dernier instant de l'engrènement. La portion de travail *AB* de la ligne d'engrènement, c'est-à-dire le segment de droite compris entre le début et la fin de la tangence effective des profils conjugués des dents, s'appelle longueur d'engrènement.

Si on diminue l'angle d'engrènement α, alors la ligne d'engrènement *TT* tourne, voir fig. 56, autour du pôle *P* en sens inverse des aiguilles d'une montre, ce qui a pour résultat que le point *B*, intersection de la ligne d'engrènement avec la circonférence d'échanfrinement de la roue de centre O_2, se déplace vers la droite, et le point *A*, point d'intersection de la ligne d'engrènement avec la circonférence d'échanfrinement de la roue de centre O_1, se déplace vers la gauche; en outre, l'arc d'engrènement augmente étant donné que l'engrènement commence plus tôt et se termine plus tard. Il est vrai que les diamètres des circonférences de base augmentent quelque peu, ce qui modifie les contours des profils et rapproche les points *C* et *D*, mais ce rapprochement est infime par rapport à l'augmentation de l'arc d'engrènement.

A présent, déterminons le nombre minimum de dents de la petite roue permettant de réaliser un engrenage pour différents angles d'engrènement. On aura en vue des dents à hauteur normale, c'est-à-dire que la hauteur des têtes est égale au module.

En premier lieu, prenons en considération que pendant le fonctionnement de la roue les profils à développante peuvent se tangenter seulement sur la portion de la ligne d'engrènement qui

se trouve entre les points T_1 et T_2 de la tangence de cette ligne avec les circonférences de base (fig. 66) puisque en dehors de cette portion les profils à développante ne peuvent plus se tangenter, mais seulement se couper.

D'un point arbitraire de tangence, appartenant à la portion T_1T_2 de la ligne d'engrènement, les profils en contact peuvent être tracés à l'aide de ce point en faisant rouler la ligne d'engrènement d'abord sur l'une puis sur l'autre circonférence de base; ainsi, on peut tracer à l'aide du point K les profils β_1 et β_2 de la fig. 66. Dans ce cas, les profils ne peuvent pas se couper puisque au point de tangence les centres de courbure des deux profils (points de tangence de la droite génératrice avec les circonférences de base) sont disposés sur différents côtés des deux profils. Les profils tracés sont convexes l'un par rapport à l'autre.

Pendant le traçage des profils à l'aide du point K qui se trouve

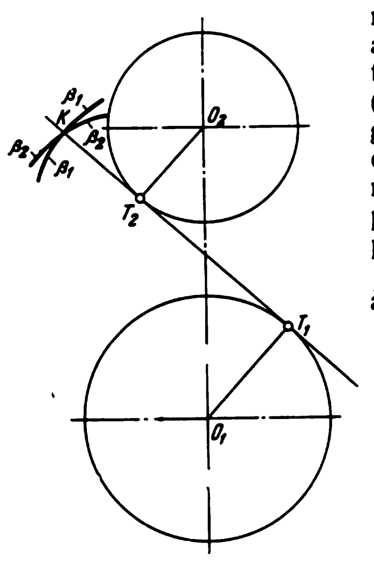


Fig. 67

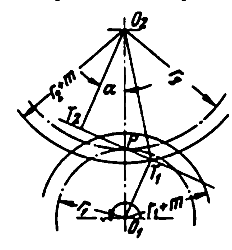


Fig. 68

en dehors de la portion T_1T_2 de la ligne d'engrènement (fig. 67), les centres de courbure des deux profils au point de tangence se trouvent d'un même côté des profils. Il en résulte que les convexités des profils ne peuvent s'opposer.

La courbure du profil β_1 décrit par le point K décroît à droite du point K puisque le rayon de courbure croît, tandis que la courbure du profil β_2 croît puisque le rayon de courbure pendant le roulement de la ligne d'engrènement sur la circonférence de centre O_2 décroît monotonement; d'où à droite du point K le profil β_1 se trouve disposé plus haut que le profil β_2. A gauche du point K la courbure du profil β_2 décroît tandis que la courbure du profil β_1 croît, d'où le profil β_1 est disposé plus bas que le profil β_2. On en déduit qu'avec un point arbitraire, apparte-

nant à la ligne d'engrènement et extérieur à la portion T_1T_2, on ne peut pas tracer les deux profils à développante qui ne se coupent pas par roulement sans glissement de la ligne d'engrènement d'abord sur l'une puis sur l'autre circonférence de base.

Menons (fig. 68) les cercles primitifs de centres O_1 et O_2 et de rayons r_1 et r_2, la ligne d'engrènement sous un angle de $90°-\alpha$ avec la droite des centres, les circonférences d'échanfrinement de rayons r_1+m et r_2+m. Abaissons des centres O_1 et O_2 les perpendiculaires O_1T_1 et O_2T_2 à la ligne d'engrènement. Les segments O_1T_1 et O_2T_2 sont les rayons r_{01} et r_{02} des circonférences de base.

On supposera que la roue menante est celle de centre O_1 et qu'elle est en rotation en sens inverse de la marche des aiguilles d'une montre.

Plus tôt s'effectuera l'engrènement d'une dent de la roue menante, plus grande sera la portion de la ligne d'engrènement utilisée; en outre, la roue menante tournera d'un plus grand angle pendant l'engrènement d'une paire de dents, et par conséquent, on pourra se limiter à un nombre plus petit de dents. Comme nous venons de l'expliquer, par des dents normales l'engrènement ne peut pas se produire sur la ligne d'engrènement jusqu'au point T_1, par suite, le plus petit nombre de dents sera obtenu si on suppose que l'engrènement commence au point T_1.

Faisons passer par le point T_1 la circonférence d'échanfrinement de la grande roue de rayon $O_2T_1=r_2+m$, c'est-à-dire la roue de centre O_2. La longueur du segment PT_1 de la ligne d'engrènement peut être exprimée de la manière suivante:

$$PT_1=T_1T_2-T_2P=\sqrt{(r_2+m)^2-r_{02}^2}-r_2\sin\alpha.$$

Cette longueur peut encore s'exprimer comme suit:

$$PT_1=r_1\sin\alpha.$$

On obtient l'équation

$$r_1\sin\alpha=\sqrt{(r_2+m)^2-r_{02}^2}-r_2\sin\alpha.$$

En substituant dans cette équation $r_2=ir_1$, où $i\geqslant 1$, $m=2r_1:z$, où z est le nombre de dents de la petite roue, on trouve

$$r_{02}=r_2\cos\alpha=ir_1\cos\alpha_1,$$

après simplification par r_1 et regroupement, on a

$$(1+2i)\sin^2\alpha\cdot z^2-4iz-4=0,$$

d'où

$$z=2\,\frac{i+\sqrt{i^2+(1+2i)\sin^2\alpha}}{(1+2i)\sin^2\alpha}\,.$$

On donne sur la fig. 69, d'après cette équation, la construction des courbes exprimant la dépendance des nombres minimums de dents possibles en fonction de l'angle d'engrènement pour différents rapports de transmission constants.

Pour $i = \infty$, au lieu de la grande roue on a une crémaillère. En divisant par i le numérateur et le dénominateur du second

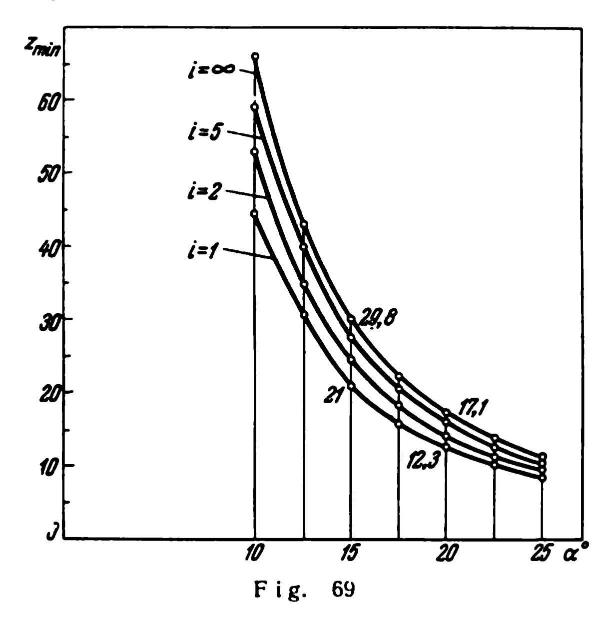


Fig. 69

membre de l'équation obtenue ci-dessus et en faisant $i = \infty$, la dépendance du nombre minimum de dents de la roue qui s'engrène avec la crémaillère prend la forme:

$$z = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

Il a été dit plus haut que si les profils des dents sont exécutés correctement, la distance des centres pendant le montage des roues peut être modifiée tout en conservant le rapport de transmission. Nous savons à présent que nous avions en vue le profil à développante. Les profils des dents ne changent pas quand on modifie la distance des centres, alors les diamètres des circonférences de base restent aussi inchangés, mais la direction de la tangente commune (c'est-à-dire la ligne d'engrènement) aux circonférences de base change, ce qui entraîne le changement de la position du pôle d'engrènement sur la droite des centres. Si avant la modification de la distance entre les centres, les cercles diviseurs coïncidaient

avec les cercles primitifs, alors, après que le pôle d'engrènement ait occupé sa nouvelle position sur la droite et, par conséquent, après le changement des diamètres des cercles primitifs, la coïncidence de ces cercles n'aura pas lieu. La variation de l'angle d'engrènement (conséquence du changement de direction de la ligne d'engrènement), de même que la variation du module d'engrènement (conséquence du changement des diamètres des cercles primitifs), ne peut pas ne pas influer sur les conditions du fonctionnement des roues, notamment, sur la valeur du coefficient de recoupement, mais la transmission du mouvement de rotation, par dents à profils à développante lorsque les cercles diviseurs ne coïncident pas avec les cercles primitifs, sera correcte et aussi pour le même rapport de transmission que pendant la coïncidence de ces cercles.

D. Exécution des roues dentées

L'exécution précise des dents est une condition indispensable pour le fonctionnement satisfaisant des roues dentées : pour de grandes vitesses circulaires (de l'ordre de 25 m/s et plus) une inexactitude de l'ordre de 0,005 mm dans l'exécution provoque des effets déjà sensibles lors du fonctionnement de l'engrenage.

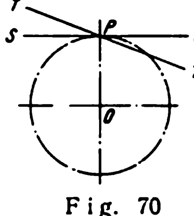


Fig. 70

C'est par le procédé de rodage que l'on obtient les meilleurs résultats pour le taillage des dents. Pour une meilleure assimilation de ce procédé, il est nécessaire d'expliquer préalablement comment s'accomplit l'engrènement d'une roue dentée et d'une crémaillère, qui est une roue dentée de rayon infini et accomplissant, par conséquent, un mouvement rectiligne.

Menons (fig. 70) le cercle primitif de la roue de centre O et de rayon OP. Si le point P est le pôle d'engrènement, alors la droite SS est la circonférence primitive de la crémaillère dont le rayon est infiniment grand. La droite SS s'appelle *droite primitive*.

La ligne d'engrènement pour une position réciproque quelconque des profils en contact doit, comme on l'a établi précédemment, être normale aux deux profils au point de tangence. Pour que cette condition, pendant le mouvement des profils conjugués de la roue et de la crémaillère, soit constamment satisfaite, le profil de la dent de la roue en rotation autour du centre de la circonférence de base doit être tracé d'après la développante ; le profil de la dent de la crémaillère en mouvement rectiligne reste perpendiculaire à la ligne d'engrènement s'il est tracé sur la droite perpendiculaire à la ligne d'engrènement, puisque pour un rayon infiniment grand de la circonférence de base la développante se transforme en droite.

Le profil rectiligne de la dent de la crémaillère a une très grande importance en technique de fabrication des roues dentées: les dents à profil rectiligne peuvent être exécutées avec une très haute précision sans difficultés particulières, et l'instrument de taille exécuté avec précision peut être employé pour l'usinage précis des dents à profils à développante indépendamment du nombre de dents de la roue à exécuter.

Pour expliquer comment on obtient un profil à développante d'une dent de roue au moyen de l'outil crémaillère (dont les dents sont à section trapézoïdale), représentons-nous d'abord une dent de la crémaillère en matériau dur et un disque cylindrique en matière plastique pouvant facilement changer de forme par pression.

Plaçons la dent de la crémaillère et le disque comme l'indique fig. 71 *a*: l'angle gauche inférieur de la dent tangente la surface extérieure du disque. Le rayon du disque est égal à $r+m$, où r est le rayon du cercle diviseur de la roue et m, le module.

Pendant le fonctionnement de la roue et de la crémaillère, le cercle primitif de la roue et la droite primitive roulent sans glisser l'un sur l'autre. Conservons la dent fixe et faisons rouler sans glisser le cercle diviseur du disque sur la droite primitive. Ce glissement aura pour résultat que la dent pénétrera graduellement dans le matériau du disque en formant ainsi une cavité entre deux dents successives. La fig. 71 *b* montre la disposition réciproque de la dent de la crémaillère et du disque pour une position intermédiaire, tandis que sur la fig. 71 *c* on montre la dent et la cavité obtenue comme résultat du roulement, limitée par les surfaces latérales des dents successives à profils à développante.

Il va de soi que cette exécution de la roue dentée, à partir de l'apprêt cylindrique, impossible en pratique, n'est donnée ici que pour illustrer le principe de taillage des dents par le procédé du rodage. Pour une dent en acier de la crémaillère et un apprêt métallique, la dent de la crémaillère cisaille graduellement le matériau de l'apprêt, au lieu que se forme une cavité due à l'action de la crémaillère dans l'apprêt, c'est pourquoi la crémaillère est exécutée sous forme d'instrument tranchant dont les profils rectilignes sont des profils à arêtes tranchantes. En outre, la crémaillère est animée du mouvement de translation alterné dans la direction perpendiculaire au plan de l'apprêt à usiner, qui pendant le fonctionnement de la crémaillère reste fixe.

Le procédé du rodage s'applique sous différents aspects pour certaines machines à tailler les dents d'engrenage que nous n'étudierons pas.

En appliquant le procédé du rodage, on obtient des profils de dents à développante sur toute la longueur à partir de la circonférence d'échanfrinement jusqu'à la circonférence de base seulement

au cas où le nombre de dents taillées n'est pas inférieur au nombre obtenu en appliquant la formule donnée plus haut pour déterminer le nombre minimum possible de dents. Si le nombre de dents est inférieur à celui obtenu d'après la formule, alors la forme du profil est faussée : la tête de la dent de l'outil crémaillère rogne la portion à développante du profil à partir de la circonférence de base ainsi que la racine de la dent, c'est-à-dire la partie de la dent située entre la circonférence de base et la circonférence

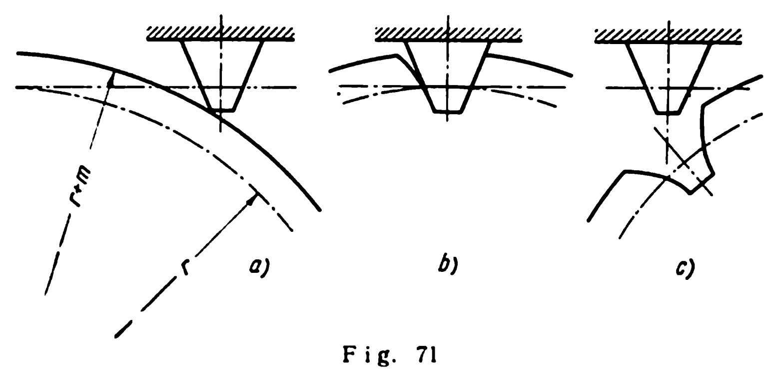


Fig. 71

d'évidement. En résultat de quoi la dent prend la forme approximativement représentée sur la fig. 72. Ces dents sont dites dents rognées.

Il faut remarquer que le rognage de la dent, qui diminue sa résistance à la flexion, n'est sensible que pour une réduction notable du nombre de dents, d'où la valeur conventionnelle du nombre minimum possible de dents. Par exemple, d'après la formule, pour $\alpha = 20^\circ$, $i = \infty$, $z = 17$, les dents sont rognées, cependant sans diminution particulière de la résistance le nombre de dents peut être pris égal à 14, ce qui se fait souvent.

Il a été supposé plus haut que pendant le taillage des dents la droite primitive SS (voir fig. 70) était dirigée suivant la tangente au cercle diviseur. C'est ainsi que l'on fabrique les roues normales ou nulles (c'est-à-dire non rectifiées). Mais, lors du taillage, la droite primitive peut être éloignée de l'axe de l'apprêt (déplacement positif) ou, au contraire, peut être rapprochée de l'axe (déplacement négatif). Dans ces cas, on obtient des roues dites non nulles (rectifiées). Quand on éloigne la droite primitive de l'axe de l'apprêt, les dents s'obtiennent non rognées et même pour un nombre de dents inférieur à 17 ; à leurs bases, les dents sont alors plus épaisses et à leurs sommets plus fines que dans les roues nulles. Par suite du rapprochement de la droite primitive de l'axe de l'apprêt, le rognage des dents est plus grand que celui

des roues nulles, ce qui fait que les dents sont moins solides ; par conséquent, le rapprochement vers l'axe de l'apprêt est rarement utilisé, principalement dans les cas où il est impossible, par un autre procédé, de conserver la distance donnée des centres.

Les dents de la roue peuvent être aussi taillées d'après le procédé qu'on appelle t a i l l a g e p a r r e p r o d u c t i o n. Ce procédé est réalisé à l'aide d'un instrument à arêtes tranchantes

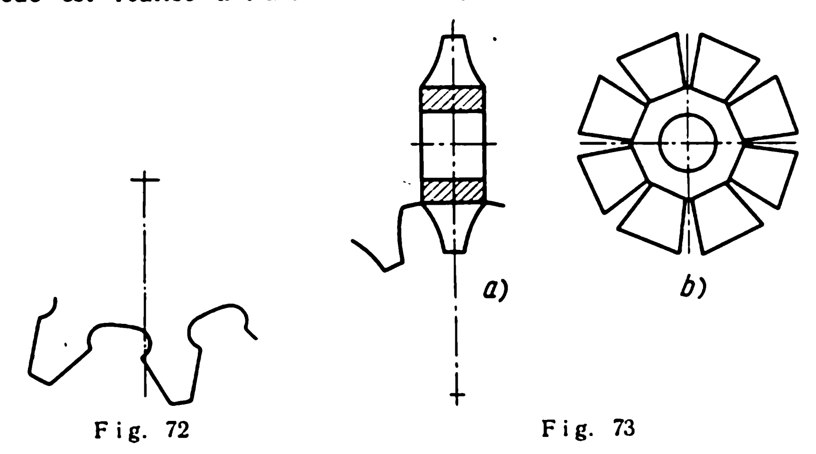


Fig. 72 Fig. 73

engendrant des creux (fig. 73 *a*). En disposant l'instrument tranchant par rapport à l'apprêt de manière que l'axe de symétrie des arêtes tranchantes de l'instrument soit dirigé suivant le rayon de l'apprêt, on peut former un creux en déplaçant l'instrument dans la direction perpendiculaire au plan de l'apprêt et en rapprochant l'apprêt de l'instrument dans la direction radiale à mesure de l'enlèvement du matériau. En appliquant ce procédé, on dispose les arêtes tranchantes sur un instrument tournant ayant la forme indiquée sur la fig. 73 *b* et appelé fraise. Conformément à cette dénomination, l'opération qui consiste à enlever le matériau de l'apprêt s'appelle fraisage. Les creux sont fraisés les uns après les autres en faisant tourner l'apprêt chaque fois d'un angle de $\frac{2\pi}{z}$, où z est le nombre de dents.

Puisque la forme du profil à développante est définie par l'angle d'engrènement, le module et le nombre de dents de la roue, alors pour l'exécution des roues dentées d'après le procédé de taillage par reproduction il faut pour un angle standard d'engrènement disposer d'une fraise spéciale pour chaque module et pour chaque nombre de dents. Vu l'impossibilité pratique d'avoir dans les usines des jeux trop grands de fraises, on est obligé de se contenter de jeux limités en utilisant une même fraise pour l'exécu-

tion de roues ayant des nombres de dents différents. Ainsi, étant en possession d'un jeu de 8 fraises, on est obligé d'utiliser la même fraise pour exécuter les roues de 26 à 34 dents, une autre fraise pour les roues de 35 à 54 dents, etc., obtenant à l'aide de chaque fraise des profils exacts seulement pour un nombre bien déterminé de dents. Dans les autres cas les profils sont inexacts. C'est pourquoi on n'applique pas le procédé de taillage par reproduction pour l'exécution des roues dentées destinées à fonctionner avec de grandes vitesses linéaires sur les circonférences de base, les dents de ces roues devant être usinées avec une très grande précision.

E. Engrenages gauches hélicoïdaux et engrenages à chevrons

Si on coupe la roue dentée en deux parties égales par un plan perpendiculaire à son axe, puis, si on relie rigidement ces parties en les écartant l'une par rapport à l'autre d'un angle inférieur à $\frac{2\pi}{z}$ et en agissant de la même manière avec l'autre roue qui doit s'engrener sur la première, on obtient alors deux roues à denture à gradins. Ceci a pour avantage qu'à chaque instant les parties de la dent qui ont subi une translation l'une par rapport à l'autre fonctionneront sur des portions différentes de profil, ce qui fait que les roues auront un fonctionnement plus doux et un plus grand coefficient de recoupement : la première partie sort d'engrènement, parcourt le même arc d'engrènement qu'aurait parcouru la dent non coupée, tandis que la seconde partie se trouve encore pendant un certain temps en engrènement.

De la même manière, on peut obtenir des roues à denture à plusieurs gradins. Cependant, malgré leurs avantages indiqués ci-dessus, les roues à dentures à gradins n'ont pas été très répandues vu leurs grandes difficultés de fabrication par rapport à la fabrication des roues ordinaires à dentures droites.

L'augmentation du coefficient de recoupement et la régularité du fonctionnement peuvent être atteintes en orientant les surfaces latérales des dentures de manière que les lignes des pôles se trouvent tracées sur le cylindre diviseur des hélices. Ces roues s'appellent engrenages à dentures gauches hélicoïdales.

On a représenté sur la fig. 74 le cylindre diviseur ainsi que la ligne *AB* tracée sur le cylindre que représente la ligne des pôles d'une denture droite, et l'hélice *AC* qui représente la ligne des pôles d'une denture gauche hélicoïdale. Si, dans une roue à dentures droites en rotation dans le sens des aiguilles d'une

montre, la dent sort d'engrènement à l'instant où la ligne AB occupe la position indiquée sur la fig. 74, alors, à cet instant, dans une roue à dentures gauches hélicoïdales, la dent commence seulement à sortir de l'engrènement tandis que l'engrènement complet se termine après que le point B ait parcouru l'arc BC.

En développant sur le plan la partie de la surface latérale du cylindre diviseur limitée par les lignes AB, AC et par l'arc BC, on obtient le triangle ABC (fig. 75), où β est l'angle formé par la ligne des pôles avec une génératrice quelconque qui est en

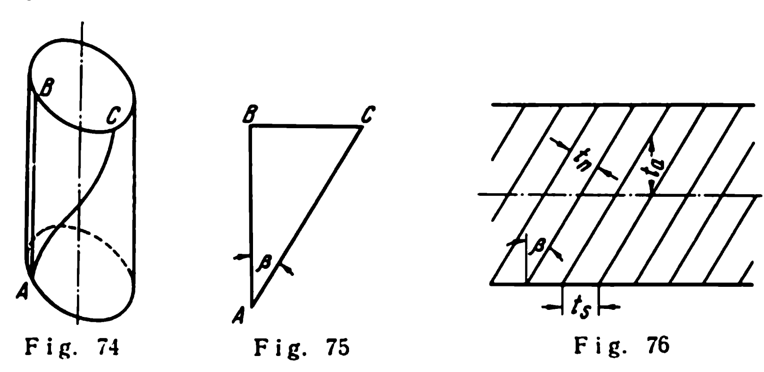


Fig. 74 Fig. 75 Fig. 76

même temps l'angle complémentaire de l'angle du pas de l'hélice des pôles, et BC — l'arc complémentaire d'engrènement.

Si la longueur d'une denture droite est $AB = b$ et le coefficient de recoupement est ε, pour des roues à dents droites, le coefficient de recoupement d'une roue à dents gauches hélicoïdales est égal à

$$\varepsilon + \frac{BC}{t} = \varepsilon + \frac{b}{t} \operatorname{tg} \beta.$$

On a représenté sur la fig. 76 le développement sur le plan d'une partie du cylindre diviseur avec les hélices des pôles: t_s est le pas latéral, c'est-à-dire la distance suivant le cercle diviseur comprise entre les profils des dents successives tournées d'un même côté dans une section latérale; le rapport $t_s : \pi = m_s$ s'appelle module d'engrènement latéral;

t_n est le pas normal ou réel, c'est-à-dire la plus courte distance comprise entre les profils de dents successives tournées d'un même côté par rapport au cylindre diviseur; le rapport $t_n : \pi = m_n$ s'appelle module normal d'engrènement;

t_a est le pas axial, c'est-à-dire la distance suivant la direction parallèle à l'axe de la roue comprise entre les profils de dents successives tournées d'un même côté par rapport au cylindre diviseur.

Par rapport aux roues à dentures droites, les roues à dentures gauches hélicoïdales jouissent des avantages suivants:

1) les dents à dentures gauches hélicoïdales étant en contact à chaque instant en différents points du profil s'usent plus uniformément que les dents à dentures droites;

2) les dents à dentures gauches hélicoïdales n'étant pas en prise simultanément sur toute la longueur, mais graduellement, sont alors moins sensibles aux chocs que les dents à dentures droites;

3) pour des conditions identiques, et comme conséquence d'un coefficient de recoupement élevé, le nombre minimum de dents



Fig. 77 Fig. 78

possible pour la roue à dents gauches hélicoïdales est inférieur à celui des roues à dents droites.

L'inconvénient des roues à dents gauches hélicoïdales consiste en ce que la force P avec laquelle la dent d'une roue exerce une pression sur la dent de l'autre roue suivant la normale commune aux hélices (voir fig. 77 sur laquelle l'hélice est développée sur le plan) se décompose en force P_1 agissant dans le plan de rotation des roues et en force P_2 dirigée perpendiculairement au plan de rotation des roues. La force P_2 crée une pression axiale sur les paliers. Ceci entraîne des pertes supplémentaires dues au frottement de ces paliers sans parler de la nécessité d'une construction plus compliquée de ces paliers.

On évite les pressions axiales dans les paliers en disposant sur un seul arbre deux roues à dents gauches hélicoïdales dont les dents sont inclinées dans des directions opposées ou bien, ce qui est encore plus simple, en disposant sur la jante de la roue deux rangées de dents inclinées dans des directions opposées. On a représenté sur la fig. 78, sous forme développée sur le plan, la portion de la surface du cylindre diviseur d'une roue à hélice latérale des dents tracées sur le cylindre diviseur. Pour la commodité de l'exécution des roues (pour le retrait de l'instrument tranchant), on ménage fréquemment une rainure intermédiaire de faible largeur entre deux rangées de dents gauches hélicoïdales.

Ces roues s'appellent r o u e s à c h e v r o n s et d'ordinaire elles sont appliquées pour transmettre de grandes puissances et pour de

grandes vitesses linéaires sur les circonférences primitives de la roue.

En 1954-1955, M. Novikov a proposé pour les engrenages gauches hélicoïdaux une transmission, qui à l'heure actuelle est de plus en plus appliquée, de conception entièrement nouvelle et différente des transmissions à développante. Les engrenages gauches hélicoïdaux à transmission dus à Novikov permettent de transmettre des efforts circulaires de 2 à 3 fois plus grands que les mêmes engrenages à transmission à développante, tout en conservant les mêmes dimensions et les mêmes matériaux.

20. TRANSMISSION DU MOUVEMENT DE ROTATION PAR CORPS FLEXIBLES. TRANSMISSION PAR COURROIES

La transmission du mouvement de rotation par corps flexibles est réalisée de la manière suivante : sur les arbres menant et mené on monte des roues à demeure dont les jantes sont enveloppées partiellement par un corps flexible ; quand l'arbre menant est en rotation et par suite la roue montée à demeure, le corps flexible entraîné par la roue menante, entraîne à son tour la roue menée. En tant que corps flexible, on emploie des courroies en différents matériaux, des câbles et des chaînes, en fonction de quoi il faut distinguer les transmissions par courroies, les transmissions par câbles et les transmissions par chaînes.

La transmission par courroies est un des types de transmission largement utilisés pour transmettre le mouvement de rotation. La transmission par câbles, du point de vue cinématique, ne diffère pas de la transmission par courroies ; il existe pourtant une différence assez sensible entre ces deux types de transmission quant aux formes constructives des pièces de transmission, conditionnée par la distinction des propriétés des câbles et des courroies. Dans le passé, la transmission par câbles était appliquée principalement pour la transmission des grandes puissances, mais avec l'électrification des usines et des fabriques, le domaine de son application s'est restreint, et à l'heure actuelle elle n'est presque plus employée. Aussi bien dans les transmissions par courroies que dans les transmissions par câbles, la roue menante entraîne un corps flexible qui à son tour entraîne la roue menée à l'aide de la force de frottement. Il en résulte que ces deux types de transmission ne peuvent pas être appliqués dans les cas où la transmission doit réaliser un rapport de transmission très précis.

La transmission par chaînes est réalisée à l'aide de roues dentées (appelées «roues étoiles») enveloppées partiellement par une chaîne

qui s'engrène avec les dents; contrairement aux transmissions par courroies et par câbles, dans les transmissions par chaînes le rapport de transmission, égal au rapport du nombre de dents des roues, est constant, indépendamment des oscillations de la valeur de la puissance à transmettre. La transmission par chaîne a deux grands inconvénients: le poids élevé de la chaîne (par rapport au poids de la courroie) et l'allongement progressif de la chaîne, ce qui entraîne la nécessité de la raccourcir périodiquement, en enlevant un des maillons. Ces deux inconvénients éliminent pratiquement la possibilité d'appliquer la transmission par chaîne pour les grandes distances entre les axes des arbres menant et mené.

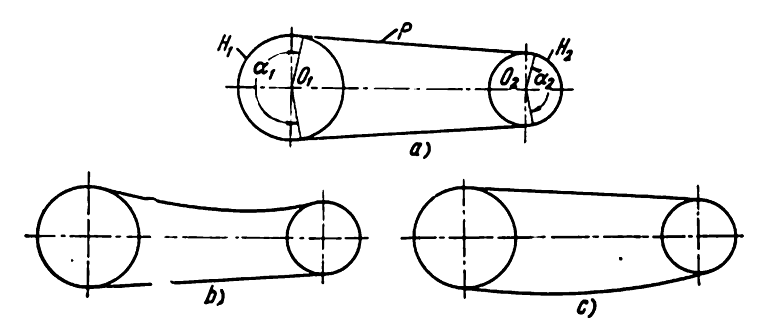


Fig. 79

Pour les petites distances, dans certaines installations mécaniques, l'application de la transmission par chaîne se justifie dans les cas où les petites distances entre les axes des arbres sont trop grandes pour les transmissions par roues dentées.

La transmission plane par courroie, c'est-à-dire la transmission entre arbres à axes parallèles, est plus fréquente sous la forme dite transmission plate, qui schématiquement est représentée sur la fig. 79 *a*, où O_1 et O_2 sont les axes des arbres, H_1 et H_2 des roues, rigidement montées sur les arbres, appelées p o u l i e s dans la transmission par courroie et P, la courroie qui enveloppe partiellement les deux poulies. Comme il a été dit plus haut, la transmission du mouvement de la poulie menante à la courroie et de la courroie à la poulie menée est réalisée à l'aide de la force de frottement. Les autres conditions restant égales, la force de frottement sera d'autant plus grande et, par suite, la transmission fonctionnera d'autant mieux que l'angle d'enroulement α de la poulie avec la courroie est plus grand. C'est pourquoi quand on établit le projet de cette transmission, si cela est possible, la partie menante de la courroie, c'est-à-dire le brin plus tendu,

doit être disposée en bas, car la partie menée de la courroie, qui pend le plus, étant disposée en haut, augmente l'angle d'enroulement (fig. 79 *b*) tandis que disposée en bas, elle diminue cet angle (fig. 79 *c*).

La distance entre les axes des arbres dans une transmission par courroie plate peut être importante et atteindre 15 m en fonction de la largeur de la courroie et de certaines autres conditions. Pour des distances trop grandes, la courroie commence à «flotter», c'est-à-dire à accomplir des mouvements vibratoires dans la direction perpendiculaire à la direction de son mouvement, faisant dépenser une partie de la puissance transmise par la poulie menante, ce qui influe défavorablement sur la durée de son fonctionnement. Pour de très petites distances entre les axes des arbres menant et mené, la courroie glisse sur les poulies en dépassant les limites tolérées pour le fonctionnement correct de la transmission.

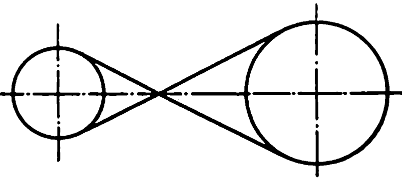


Fig. 80

Dans une transmission plate, les deux poulies sont en rotation dans le même sens. Pour transmettre le mouvement avec changement du sens de rotation, on applique la transmission croisée, schématiquement représentée sur la fig. 80. Pour des distances égales entre les axes des poulies et pour des poulies de mêmes diamètres, les angles d'enroulement des poulies et de la courroie de la transmission croisée sont plus grands que dans une transmission plate. C'est en ceci que consiste l'avantage de la transmission croisée. Cependant, pour de petites distances entre les axes des arbres on obtient pour la courroie une inclinaison trop accentuée par rapport à la poulie, ce qui rend l'utilisation de la courroie incomplète ; en outre, dans les transmissions croisées la courroie se tord suivant deux plans différents et est soumise à l'usure au point de jonction des brins menant et mené entre les poulies en rotation dans des sens opposés. Ces défauts de la transmission croisée sont d'autant plus manifestes que la courroie est large et que la vitesse linéaire est grande.

Si on pouvait réaliser une transmission par courroie de manière que la courroie ne glisse pas sur les poulies, alors le rapport de transmission serait déterminé d'après l'égalité

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = i,$$

c'est-à-dire que le rapport de transmission serait égal au rapport des rayons des poulies.

Néanmoins, pendant le fonctionnement de la transmission, la courroie ne peut pas ne pas glisser sur les poulies aussi soignée que soit l'exécution de la transmission, car dans la partie menante la courroie s'allonge davantage que dans la partie menée. La pratique nous enseigne que du fait du glissement inévitable de la courroie sur les poulies, le nombre de tours de la poulie menée, pour un fonctionnement entièrement satisfaisant de la

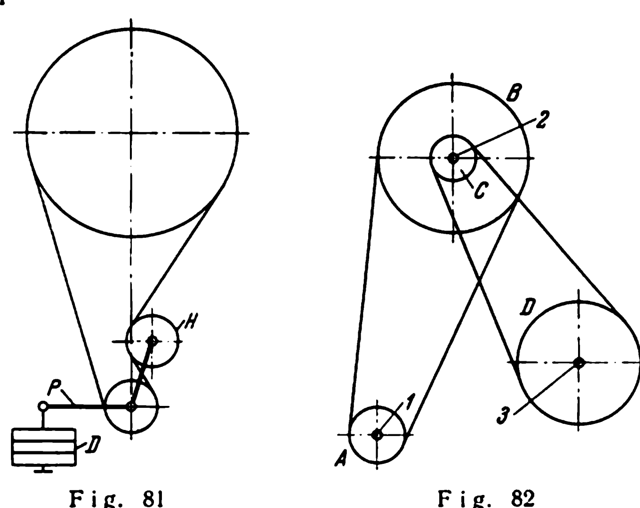


Fig. 81 Fig. 82

transmission, est de 1,5 à 2,5% plus petit qu'il aurait dû être s'il n'y avait pas eu de glissement. Le glissement, les autres conditions étant égales, est d'autant plus grand qu'est grande la puissance à transmettre.

L'impossibilité de réaliser un rapport de transmission précis est le défaut de la transmission par courroie. Il faut, d'ailleurs, avoir en vue que pour les besoins pratiques ce défaut, dans de nombreux cas, n'a aucune importance.

Le glissement de la courroie dépasse la limite permise et le fonctionnement de la transmission par courroie devient insatisfaisant quand le rapport de transmission est excessivement grand et quand la distance entre les axes des arbres menant et mené est trop petite, car, pour chacune de ces conditions défavorables, l'angle d'enroulement avec la courroie de la petite poulie devient insuffisant. Dans ces cas, la transmission par courroie est installée soit avec un *galet de tension* ou un *galet tendeur* soit avec une *transmission intermédiaire*.

La transmission avec un galet de tension est représentée schématiquement sur la fig. 81. Dans cette transmission, le galet de tension *H* en rotation libre sur l'axe du levier à deux bras *P* exerce une certaine pression sur la partie menée de la courroie, l'écartant et par là même augmentant considérablement l'angle d'enroulement de la petite poulie avec la courroie. Le levier *P* est posé librement sur l'axe de la petite poulie et se trouve sous

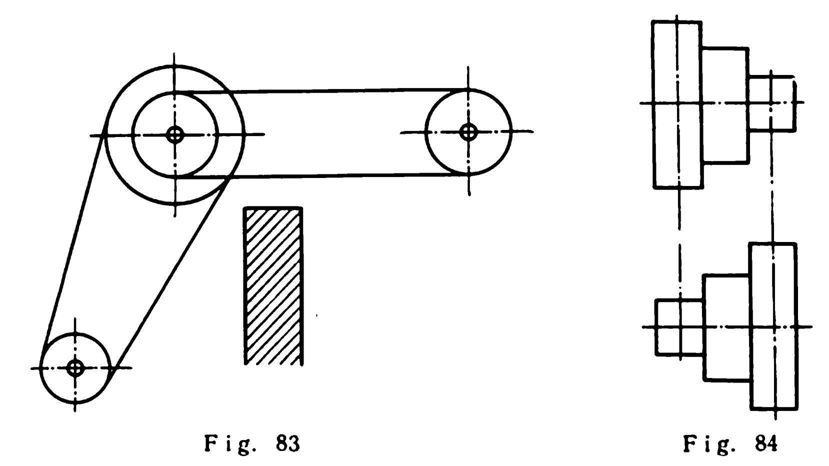


Fig. 83 Fig. 84

l'action de la charge *D* ou du ressort. La force avec laquelle le galet de tension exerce une pression sur la courroie est facilement réglable en faisant varier la charge ou la tension du ressort. Le fonctionnement de la transmission à galet de tension peut être satisfaisant aussi bien pour les grands rapports de transmission que pour les petites distances entre les axes des arbres menant et mené.

La transmission avec une transmission intermédiaire (fig. 82) est une transmission à arbre intermédiaire dans lequel la raison générale de l'arbre menant *1* et de l'arbre mené *3* est réalisée en deux étapes: de la poulie *A* le mouvement est transmis à la poulie *B* montée sur l'arbre *2* et de la poulie *C*, rigidement montée sur l'arbre *2*, à la poulie *D*. A chacune de ces étapes, qui représentent une transmission plate ordinaire, afin d'éviter le patinage de la courroie sur la poulie, la raison de la transmission ne doit pas dépasser une limite permise; c'est pourquoi, pour une raison de transmission très grande, on peut installer deux arbres intermédiaires ou plus.

On a recours à la transmission intermédiaire parfois même sans aucune nécessité de décomposer un grand rapport de transmission en deux petits: la transmission intermédiaire peut être

indispensable si, d'après les conditions locales, la transmission directe de l'arbre menant à l'arbre mené ne peut être réalisée (fig. 83).

Il est souvent nécessaire de réaliser la transmission aux machines-outils avec divers rapports de transmission. On y arrive à l'aide de poulies à étages (fig. 84). Les diamètres des poulies à étages doivent être choisis de manière que sur tous les étages la longueur utile de la courroie soit la même. En appliquant des poulies coniques (fig. 85), on peut varier continûment le rapport

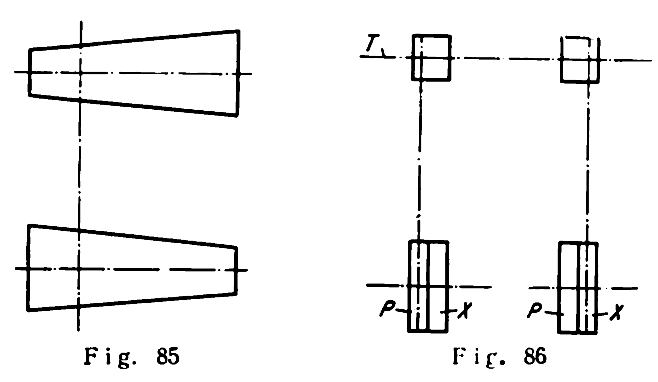


Fig. 85 Fig. 86

de transmission entre des limites connues en fonction des plus grands et des plus petits diamètres sans arrêter le fonctionnement de la transmission pendant le changement du rapport de transmission.

Dans les cas où d'un arbre menant les poulies de plusieurs machines-outils ou appareils sont animées d'un mouvement de rotation, et où il est nécessaire d'avoir la possibilité d'arrêter la transmission du mouvement de rotation d'une poulie sans interrompre la transmission des autres poulies, alors, sur l'arbre mené de chaque machine-outil ou appareil, à côté de la poulie mobile P (fig. 86) montée rigidement sur l'arbre menant, on installe une poulie folle X en rotation libre sur l'arbre. En installant sur l'arbre menant T une poulie d'épaisseur double, on peut, pendant la rotation continue de l'arbre menant, mettre en mouvement ou arrêter l'arbre mené en faisant passer la courroie de la poulie folle à la poulie mobile et inversement à l'aide d'un dispositif simple appelé doigt de débrayage.

CHAPITRE IV

MÉCANISMES GAUCHES TRANSMETTANT LE MOUVEMENT DE ROTATION

21. TRANSMISSION PAR FRICTION

La transmission par friction gauche se réalise entre des arbres à axes concourants. Cette transmission peut être réalisée pour des différents angles entre les axes des arbres, mais le plus souvent en pratique elle s'applique à des arbres dont les axes se coupent à angle droit. Seules ces transmissions seront considérées ultérieurement.

Dans une transmission du mouvement circulaire entre des arbres à axes parallèles (pour un rapport de transmission constant), les cylindres primitifs sont en roulement sans glissement l'un sur l'autre; c'est pour cette raison-là que cette transmission s'appelle cylindrique. Dans une transmission entre arbres à axes concourants (avec un rapport de transmission constant), les cônes primitifs roulent l'un sur l'autre (fig. 87), et c'est pourquoi cette transmission est dite conique.

Dans une transmission cylindrique, le rapport de transmission peut s'exprimer à l'aide du rapport des rayons des cylindres primitifs et dans une transmission conique à l'aide du rapport des rayons de base des cônes primitifs, ce dont on peut s'en convaincre facilement de la manière suivante.

La vitesse linéaire du point A (fig. 87), appartenant à l'un des cônes, pendant la rotation du cône autour de l'axe OB est égale à $\omega_1 R_1$, où ω_1 et R_1 sont respectivement la vitesse angulaire et le rayon de base du cône; la vitesse linéaire du point A, appartenant à l'autre cône est $\omega_2 R_2$, où ω_2 et R_2 sont respectivement la vitesse angulaire et le rayon de base de ce cône. Pendant le roulement sans glissement d'un cône sur l'autre, l'égalité

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

doit être vérifiée, d'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i = \frac{R_2}{R_1}.$$

Dans une transmission conique, le rapport de transmission peut aussi s'exprimer autrement. En désignant par δ_1 et δ_2 les demi-angles aux sommets des cônes, on trouve

$$\frac{R_2}{R_1}=\mathrm{tg}\,\delta_2=\mathrm{ctg}\,\delta_1,$$

c'est-à-dire le rapport de transmission d'une transmission conique peut donc s'exprimer à l'aide de la tangente du demi-angle au sommet d'un des cônes primitifs ou par la cotangente du demi-angle au sommet de l'autre cône.

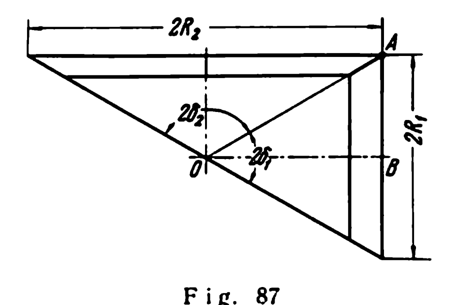


Fig. 87

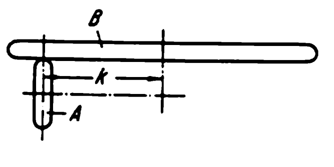


Fig. 88

Dans une transmission par friction cylindrique, les surfaces des cylindres primitifs sont les cylindres extérieurs des rouleaux. De même, dans la transmission par friction conique, les surfaces des cônes primitifs sont les surfaces extérieures des rouleaux coniques qui, comme dans la transmission cylindrique, doivent exercer une pression l'un par rapport à l'autre avec une force suffisamment grande.

Pour assurer l'adhérence d'un rouleau sur l'autre, dans la transmission cylindrique, l'arbre d'un des rouleaux est posé sur des paliers mobiles radialement, et l'adhérence est réalisée par le déplacement radial du palier avec l'arbre et le rouleau. Dans la transmission conique, les arbres sont posés sur des paliers fixes et l'adhérence est assurée par une force (ordinairement à l'aide d'un ressort) dirigée suivant l'axe d'un des rouleaux.

Dans la transmission conique usuelle le rapport de transmission est constant. Dans la transmission dite à plateau, donnée sur la fig. 88, le rapport de transmission peut varier entre certaines limites en modifiant la distance k de l'axe du plateau B jusqu'au plan de symétrie du galet A. Pour modifier cette distance, on installe de simples dispositifs permettant d'immobiliser le galet A en un point arbitraire de l'arbre.

La transmission à plateau est l'un des aspects de ce qu'on appelle variateur. Les variateurs sont des mécanismes assurant le réglage graduel, c'est-à-dire un réglage sans à-coups de la vitesse

angulaire de l'arbre mené lorsque la vitesse de l'arbre menant est constante.

Dans la transmission par friction conique les arbres exercent des pressions sur les paliers non seulement radialement, comme cela se produit dans les transmissions cylindriques, mais aussi axialement. Pour le reste, l'avantage et les défauts des transmissions par friction coniques, permettant de délimiter leur domaine d'application, sont les mêmes que ceux des transmissions cylindriques.

22. TRANSMISSION PAR ENGRENAGE

La transmission par engrenage gauche, tout comme la transmission par friction gauche, est réalisée entre arbres dont les axes sont concourants, et, de même que la transmission par friction, elle est appliquée dans la plupart des cas entre arbres dont les axes se coupent à angle droit. C'est cette transmission qui sera étudiée.

Tout comme les cylindres primitifs pour la transmission par engrenage cylindrique, les cônes primitifs pour la transmission par engrenage conique sont purement fictifs. Les dimensions des dents qui sont définies par la hauteur, l'épaisseur, le pas et le module dans les roues coniques varient proportionnellement avec la distance du sommet du cône diviseur. Le module d'une roue conique arrondi jusqu'à sa valeur standard pendant l'exécution du projet de la transmission est le module de la grande base du cône diviseur.

Comme dans une transmission par friction conique, le rapport de transmission d'un engrenage conique peut s'exprimer à l'aide du rapport des rayons de base des cônes primitifs ou à l'aide de la tangente du demi-angle au sommet d'un des cônes primitifs (soit encore à l'aide de la cotangente du demi-angle au sommet de l'autre cône primitif).

Dans une transmission cylindrique l'engrènement des paires de profils conjugués s'effectue dans un plan, et c'est pour cela que le tracé des deux profils peut être exécuté sur un plan avec la précision voulue (pratiquement il s'obtient par taillage à l'aide de machine à tailler les engrenages, sans traçage préalable).

Dans l'engrenage conique, l'engrènement des paires de profils conjugués s'effectue sur une surface sphérique. Or, comme on le sait, la surface sphérique n'est pas développable sur le plan, d'où il en découle que le traçage précis des profils des roues coniques n'est pas possible sur le plan. Pour avoir une exécution précise, les profils des dents des roues coniques doivent être les développantes des sphères, mais la fabrication des roues ayant ces

profils présente des difficultés pratiques pour les machines-outils modernes.

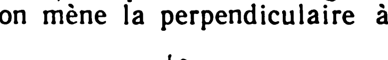
Il y a environ cent ans que l'on a proposé une méthode approchée pour le traçage des engrenages coniques. D'après cette méthode, le traçage sur le plan des profils des dents des roues coniques s'effectue de la manière suivante (fig. 89):

1) on construit les cônes primitifs;

2) du point A de la génératrice commune aux cônes primitifs on mène la perpendiculaire à cette génératrice; les points O_1 et O_2 d'intersection de cette perpendiculaire avec les axes des cônes primitifs sont les sommets des cônes complémentaires;

3) les segments O_1A et O_2A appartiennent aux génératrices des cônes complémentaires; les arcs des circonférences de rayons O_1A et O_2A sont les développements des bases des cônes complémentaires;

4) sur les développements des bases des cônes complémentaires, comme sur les cercles primitifs, on construit les profils des dents de la même manière que pour la transmission cylindrique.



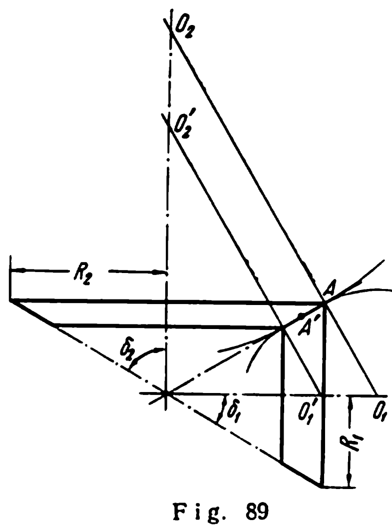


Fig. 89

De la même manière, on obtient des arcs des circonférences de rayons $O_1'A'$ et $O_2'A'$, sur lesquels, comme sur les circonférences primitives, on construit les profils des dents pour des cônes primitifs de petites bases.

Le développement sur le plan du cône complémentaire n'est pas un cercle entier, mais une portion de cercle limitée par un arc de longueur $2\pi R$, où R est le rayon de base du cône primitif et du cône complémentaire. Sur cet arc de circonférence on peut construire autant de profils que la circonférence de base du cône primitif peut en contenir et la circonférence de rayon $\frac{R}{\cos\delta}$ décrite par la génératrice du cône complémentaire peut contenir $\frac{z}{\cos\delta}$ profils, où z est le nombre de dents de la roue conique et δ — le demi-angle au sommet du cône primitif. D'où, les autres conditions restant égales, la paire de roues coniques à z dents pour la petite roue fonctionne avec un coefficient de recoupement analogue à celui de la paire de roues cylindriques dont la petite roue pos-

séderait $\frac{z}{\cos\delta}$ dents. Le nombre $\frac{z}{\cos\delta}$ s'appelle nombre fictif (ou réduit) de dents de la roue conique.

Sur les machines modernes à tailler les engrenages, les profils des dents des roues coniques obtenus se distinguent des développantes sphériques et des profils obtenus d'après la méthode simplifiée de construction exposée ci-dessus.

23. ENGRENAGE A VIS SANS FIN

L'engrenage à vis sans fin est une modification du couple cinématique gauche vis-écrou.

Si l'on empêche la vis d'effectuer le mouvement de translation (fig. 90 *a*), et l'écrou le mouvement de rotation et si on permet à la vis d'accomplir le mouvement de rotation, alors l'écrou sera animé d'un mouvement de translation. Le mouvement de l'écrou n'est pas altéré si seulement une partie de l'écrou est en contact

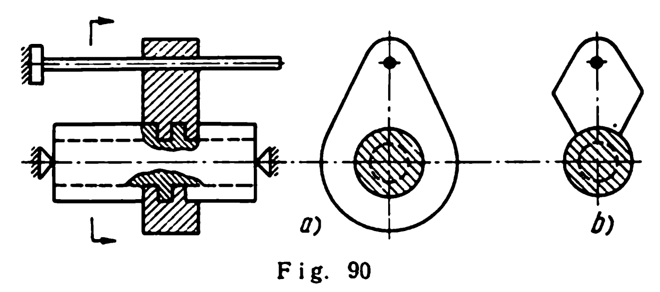


Fig. 90

avec la vis (fig. 90 *b*). Sur la coupe de l'écrou, comme l'indique la fig. 90 *b*, il ne reste que les parties des filets hélicoïdaux qui ont la forme de dents obliques.

En faisant tourner la vis, les filets de l'écrou en coupe sont animés d'un mouvement de translation ; ce mouvement de translation peut être considéré comme un mouvement de rotation suivant une circonférence de rayon infini. Si les filets de l'écrou sont disposés sur la jante d'une roue, alors, à l'aide de transformations adéquates de leurs formes, on obtient l'engrenage à vis sans fin représenté sur la fig. 91, dont la vis s'appelle vis sans fin et la roue, roue d'engrenage à vis sans fin.

La section de l'engrenage à vis sans fin par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue et passant par l'axe de la vis sans fin, comme cela se voit sur la fig. 92, ne diffère pas de la section par un plan perpendiculaire à l'axe d'une roue à denture droite en engrènement avec une crémaillère. Le profil de la dent de la

crémaillère, comme cela a été expliqué ci-dessus, est rectiligne, donc la section longitudinale d'un filet de la vis sans fin est un trapèze. On emploie aussi des vis sans fin dont les profils sont à développante.

La distance entre les points voisins de l'intersection de l'hélice tracée sur le cylindre diviseur de la vis sans fin avec les génératrices du cylindre s'appelle pas de l'hélice. D'ordinaire, le pas de l'hélice est noté par la lettre latine minuscule *s*.

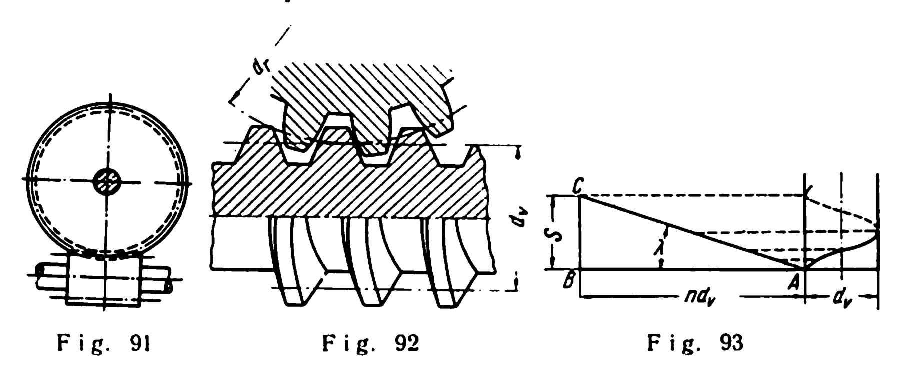


Fig. 91 Fig. 92 Fig. 93

L'hélice tracée sur le cylindre diviseur par un filet de la vis s'appelle hélice moyenne.

En développant sur un plan le cylindre diviseur de la vis sans fin et l'hélice moyenne, on obtient deux droites dont l'une est la développée du cercle diviseur et l'autre, la développée de l'hélice. L'angle λ formé par ces deux droites est égal au pas du filet de la vis sans fin suivant le cylindre diviseur (fig. 93).

On appelle pas du filet de la vis sans fin suivant le cylindre diviseur l'angle aigu formé par la tangente à l'hélice moyenne et la tangente au cercle diviseur au point correspondant.

En portant à partir du point *A* (fig. 93) le segment de droite *AB* de longueur égale à la longueur de la circonférence du cercle diviseur et en portant sur la perpendiculaire abaissée sur *AB* le segment de droite *BC* de longueur égale au pas *s* de l'hélice moyenne, on déduit alors du triangle *ABC* la dépendance suivante entre l'angle λ, le pas *s* de l'hélice et le diamètre d_v du cylindre diviseur de la vis

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s}{\pi d_v} .$$

La vis sans fin peut être composée de plusieurs filets également distants les uns des autres. On a représenté sur la fig. 94 une vis sans fin à trois filets. Si la vis sans fin est composée de z_v filets, elle est alors appelée vis sans fin à z_v progressions.

Le nombre z_v des progressions de la vis sans fin est le nombre de filets de la vis sans fin obtenu par l'intersection d'un plan perpendiculaire à son axe.

La distance entre les surfaces profilées des filets successifs qui se trouvent d'un même côté et mesurée parallèlement à l'axe de la vis sans fin s'appelle pas axial de la vis sans fin. Le pas axial de la vis sans fin sera toujours noté par la lettre latine minuscule t.

On a représenté sur la fig. 95 la section longitudinale d'une vis sans fin à trois progressions et on a indiqué par les chiffres *1*, *2*, *3* les différentes progressions, le pas s de l'hélice moyenne

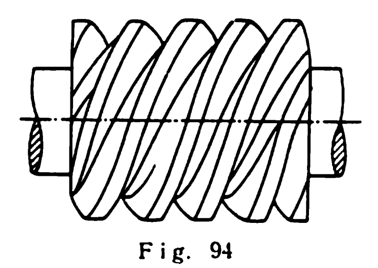


Fig. 94

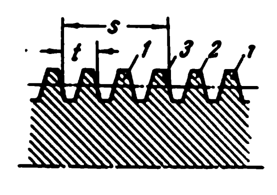


Fig. 95

et le pas axial t. On déduit de ce qui est exposé ci-dessus la relation suivante entre s et t:

$$s = z_v \cdot t.$$

A l'aide de cette dernière formule on trouve

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s}{\pi d_v} = \frac{z_v \cdot t}{\pi d_v} = \frac{z_v \cdot \pi m}{\pi d_v} = \frac{z_v}{q},$$

où m est le module d'engrènement et $q = d_v : m$, le nombre de modules contenu dans le diamètre du cylindre diviseur de la vis.

Les nombres q, recommandés pour le projet d'un engrenage à vis sans fin, sont prévus par le standard. En plus des standards autorisés mais non recommandés, on a prévu les modules suivants et les nombres q correspondant aux différents modules:

$m =$	3	4	5	6	8	10	12	16	20 mm
$q =$	12	11	10	9	8	8	8	9	8

Pour z_v de 1 à 4 et q de 12 à 8, l'angle λ varie entre les limites arc $\operatorname{tg} \frac{1}{12} = 4°23'55''$ jusqu'à arc $\operatorname{tg} \frac{4}{8} = 26°33'54''$.

L'angle d'engrènement $\alpha = 20°$ est standardisé pour la section de base de la roue, c'est-à-dire pour la section par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue. Pour un angle d'engrènement

standard, le nombre minimum de dents possible de la roue est 14 ; cependant, pour avoir un engrenage fonctionnant convenablement, on recommande de prendre au moins 26 dents.

La vitesse linéaire sur la circonférence primitive de la roue est

$$v_r = \frac{\pi d_r n_r}{60},$$

où d_r et n_r sont respectivement le diamètre du cercle primitif et le nombre de tours par minute de la roue.

La vitesse linéaire de l'écrou lié à la vis sans fin et animé d'un mouvement de translation pendant la rotation de la vis sans fin est égale à

$$v_v = \frac{s \cdot n_v}{60}.$$

Or, comme $v_r = v_v$, alors

$$\pi d_r n_r = s n_v,$$

d'où le nombre de transmission i est égal à

$$i = \frac{n_v}{n_r} = \frac{\pi d_r}{s} = \frac{\pi z_r m}{z_v \pi m} = \frac{z_r}{z_v},$$

c'est-à-dire i est égal au rapport du nombre de dents de la roue au nombre de progressions de la vis.

Les nombres de transmission dans les engrenages à vis sans fin appliqués dans la construction des machines lourdes atteignent 50 et plus ; dans les transmissions de faible puissance, dans la mécanique de précision, ils sont de 300 et plus.

Les dimensions de la section des dents d'une roue à vis sans fin par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue sont définies de la même manière que dans les engrenages. Les dimensions de la section des filets d'une vis sans fin par un plan passant par son axe sont définies de la même manière que dans les engrenages.

On groupe les engrenages à vis sans fin, d'après la vitesse angulaire de la vis sans fin, en engrenages rapides et en engrenages à faibles vitesses. Les engrenages rapides sont principalement appliqués pour transmettre les puissances des moteurs électriques. Dans ces cas, l'arbre de la vis sans fin est relié à l'aide d'un manchon à l'arbre du moteur électrique en rotation avec une grande vitesse, tandis que l'arbre de la roue est relié à l'arbre du mécanisme exécuteur en rotation avec de petites vitesses angulaires. Les engrenages à faibles vitesses s'appliquent principalement dans les installations à commande manuelle pour gain de force, par exemple dans les appareils de levage manuel.

Le chaînon menant dans un engrenage à vis sans fin est presque toujours la vis sans fin. Les engrenages à vis sans fin et à roue menante sont rares et se rencontrent seulement dans les mécanismes à faibles puissances.

24. TRANSMISSION PAR COURROIES

Par rapport aux transmissions planes par courroies, la transmission gauche par courroie se rencontre moins fréquemment. La transmission entre arbres d'axes appartenant à différents plans et non coplanaires dont les projections sur un plan se coupent à angles droits est réalisée sous forme de transmission dite semi-non coplanaire ou semi-croisée représentée sur la fig. 96. Lors de l'installation de cette transmission, il faut assurer les conditions suivantes: la courroie doit arriver de face sur la poulie, c'est-à-dire de manière que l'axe de la partie de la courroie qui arrive sur la poulie doit se déplacer dans la direction qui coïncide avec le plan moyen de la poulie, la partie de la courroie qui descend de la poulie ne doit pas s'écarter d'un angle supérieur à 25°. C'est pourquoi la transmission semi-croisée ne peut fonctionner pendant le mouvement de la courroie que dans une seule direction, c'est-à-dire n'est pas réversible. L'arrivée de face de la courroie sur la poulie est également nécessaire pour le fonctionnement satisfaisant de la transmission plane, mais dans la transmission plane on n'a pas besoin d'observer cette condition car si cette transmission est montée correctement, elle est alors satisfaite automatiquement pendant le mouvement de la courroie dans n'importe quel sens.

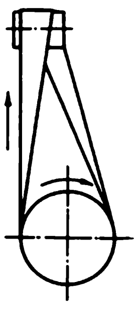


Fig. 96

La transmission par courroie peut être réalisée entre arbres disposés de manière quelconque dans l'espace, en ayant recours à des galets guideurs en rotation libre sur leurs axes. Les axes des galets guideurs et des poulies menante et menée doivent être disposés de manière que la condition précédente soit observée. A l'heure actuelle, ces transmissions sont considérées comme appartenant au domaine du passé.

CHAPITRE V

MÉCANISMES A CAMES

25. PROJET DES MÉCANISMES A CAMES

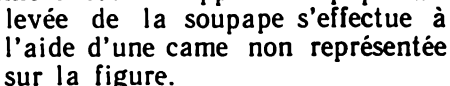
Le mécanisme à cames, sous son aspect le plus élémentaire, est un mécanisme à 3 chaînons à couple supérieur, qui, dans la plupart des cas, a pour but de transformer le mouvement circulaire continu du chaînon menant en mouvement du chaînon mené suivant une loi donnée. Les types de mécanismes à cames sont très variés et leur domaine d'application très étendu, mais dans ce chapitre on n'étudiera pas tous les types répandus des mécanismes à cames.

On donne sur les fig. 39 et 40 les schémas cinématiques de deux mécanismes à cames. Dans le mécanisme de la fig. 39, lorsque le chaînon menant K d'un profil plus ou moins compliqué, appelé came, est en rotation, le chaînon mené T, appelé poussoir, est en mouvement rectiligne alterne. Dans l'autre mécanisme (fig. 40), le chaînon mené effectue un mouvement circulaire de petits angles autour d'un axe fixe et, comme précédemment, alternativement dans les deux sens de rotation. Dans les deux mécanismes, la fermeture des chaînons du couple supérieur, c'est-à-dire leur contact permanent, est ordinairement réalisée par un ressort qui fait adhérer le chaînon mené au chaînon menant.

Quand on établit le projet d'un mécanisme à came, il faut avant tout déterminer la loi de mouvement du chaînon mené en prenant en considération sa désignation dans l'installation dont une des parties est le mécanisme à came. Les considérations d'après lesquelles on doit se guider seront explicitées sur un exemple.

Supposons que d'après le schéma de la fig. 39 on ait construit un mécanisme à came qui, pendant la rotation de la came avec une vitesse angulaire uniforme, doit ouvrir pour un quart de tour l'orifice des espaces libres A et B (fig. 97), et pour la

portion de tour restante, fermer cet orifice. Une telle situation peut se réaliser à l'aide des mécanismes à came, par exemple, dans les moteurs à combustion interne: par un orifice qui se ferme à l'aide d'un mécanisme à came, le mélange de vapeur d'essence et d'air passe de l'espace A à l'espace B (canal) et par un orifice disposé à un autre emplacement du moteur se fermant par un autre mécanisme à came, les produits de la combustion sont rejetés en dehors du moteur en passant par l'espace B. Dans ce cas, le poussoir du mécanisme à came s'appelle soupape. La


levée de la soupape s'effectue à l'aide d'une came non représentée sur la figure.

Le profil de la came doit non seulement assurer la levée et

Fig. 97

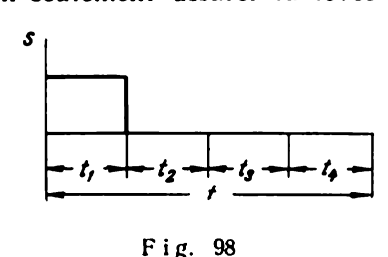


Fig. 98

la pose de la tête de la soupape sur son siège à l'instant de temps strictement déterminé, mais aussi, dès l'instant de levée de la soupape jusqu'à l'instant de la pose sur le siège, il doit tenir l'orifice ouvert au maximum pour que la soupape offre le moins possible de résistance au déplacement des gaz. De plus, le profil de la came doit assurer un mouvement régulier au maximum, sans à-coups, pour éviter l'usure rapide des aires de contact de la soupape avec le siège et du poussoir avec la came. La vérification de toutes les conditions que l'on vient d'indiquer dépend de la loi de mouvement du poussoir prise pour base du tracé du profil de la came.

Si on prend en considération seulement le rôle tenu par le clapet de la soupape, on obtient alors le graphique idéal du mouvement du poussoir donné sur la fig. 98, où l'on a porté suivant l'axe des abscisses, partagé en quatre segments égaux, l'intervalle de temps t pendant lequel la came accomplit un tour complet et suivant l'axe des ordonnées, la distance de la soupape à partir de sa position inférieure qui permet de fermer complètement l'orifice. Le graphique prévoit au premier quart de tour de la came le passage instantané du clapet de la soupape de sa position inférieure à sa position supérieure, le maintien dans

cette position pendant que la came effectue le premier quart de tour, puis le passage instantané à la position inférieure et le maintien à cette position pendant l'intervalle de temps $t_2+t_3+t_4$, c'est-à-dire jusqu'au début du tour suivant de la came. Ce graphique est idéal puisque, du début jusqu'à la fin du premier quart de tour, l'orifice est complètement ouvert pendant tout ce temps offrant ainsi la résistance, la plus petite possible, au déplacement des gaz.

Cependant, ce graphique est inacceptable en pratique. Les passages trop rapides du clapet de la soupape et des masses qui lui sont liées (sans parler des passages instantanés) d'une position

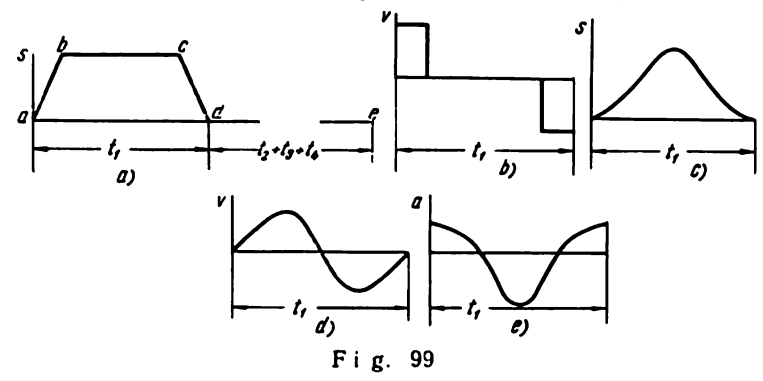


Fig. 99

à l'autre correspondraient à des accélérations excessives, et, par conséquent, à des forces d'inertie et à des chocs excessifs.

En prenant tout ceci en considération, on doit prévoir le passage graduel du chaînon mené de la position inférieure à la position supérieure et inversement et tracer le graphique sous la forme indiquée sur la fig. 99*a*. Sous cette forme, on peut distinguer sur le graphique les quatre phases suivantes: 1) la phase d'éloignement (suivant le segment de droite *ab*); 2) la phase de la position supérieure (suivant le segment de droite *bc*); 3) la phase d'approchement (suivant le segment de droite *cd*); 4) la phase de la position inférieure (suivant le segment de droite *de*).

Toutefois, le graphique des espaces parcourus par le chaînon mené, composé de quatre segments de droite, ne peut être pris comme base du mécanisme à came. Il est facile de s'en convaincre en construisant le graphique des vitesses (fig. 99*b*) duquel il découle qu'aux points *a*, *b*, *c*, *d* du graphique des espaces parcourus la vitesse change instantanément de grandeur, par conséquent, théoriquement, avec des accélérations infiniment grandes.

Pour éviter les chocs dits durs, c'est-à-dire les chocs en présence d'accélérations infiniment grandes, on doit donner aux

graphiques des espaces parcourus la forme approximativement représentée sur la fig. 99*c*, c'est-à-dire qu'il faut prévoir un passage graduel d'une phase à l'autre. En outre, pour ce graphique des espaces parcourus, le graphique des vitesses est de la forme indiquée sur la fig. 99*d*, et le graphique des accélérations, sur la fig. 99*e*. Les chocs sont particulièrement indésirables à l'instant de la levée initiale et de la pose du clapet de la soupape sur son siège. Le graphique donné sur la fig. 99*e* montre que le déplacement du chaînon mené du mécanisme n'est pas accompagné de chocs durs. Cependant, les chocs sont d'autant plus doux aux instants de passage d'une phase à l'autre que la résistance moyenne des gaz est plus grande, quand ils passent par l'orifice de la soupape insuffisamment ouverte.

En se basant sur ces considérations et sur d'autres analogues, on est amené à choisir pour le poussoir la loi de mouvement la plus adéquate.

Pour éviter l'usure rapide des aires de contact du poussoir et de la came, on exécute l'extrémité du poussoir sous la forme d'un galet tournant librement autour d'un axe. Le diamètre de l'axe du galet et le diamètre du galet lui-même sont déterminés par les calculs de résistance des matériaux, ainsi que par des considérations constructives que nous n'aurons pas à envisager. Nous devons prendre en considération la présence du galet pendant l'établissement du projet de mécanisme à came parce que avec un poussoir à galet, au lieu du profil théorique de la came (indiqué sur le schéma cinématique) sur lequel le poussoir est en mouvement par rapport à la came, nous aurons le profil empirique sur lequel le galet devrait se déplacer. Examinons le procédé du tracé du profil empirique d'une came.

Pour tracer le profil empirique d'une came, il faut connaître le diagramme des espaces parcourus par le poussoir sur lequel ces espaces sont exprimés en fonction de l'angle de rotation de la came. Si l'on dispose d'un graphique où les espaces parcourus par le poussoir sont exprimés en fonction du temps, alors, pour une vitesse angulaire constante de la came, ce graphique peut être utilisé, après avoir rétabli l'échelle suivant l'axe des abscisses. Pour une vitesse angulaire variable de la came, le graphique peut être facilement reconstruit en prenant en considération la dépendance de la vitesse angulaire de la came en fonction du temps.

Supposons (fig. 100) que le poussoir avec son galet se trouve dans la phase de la position inférieure et soit le point O le centre de rotation du profil de la came. Supposons aussi que la came soit en rotation en sens inverse des aiguilles d'une montre. Menons du point O, comme centre, un cercle tangent au galet du pous-

soir. A l'aide de cette circonférence on doit tracer la portion du profil de la came sur laquelle doit s'appuyer le galet pendant la phase de la position inférieure.

Tournons la came d'un angle φ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Pendant qu'on accomplit cette rotation, le centre A du profil du galet se déplace vers le haut d'une distance s qui nous est connue d'après le graphique des espaces parcourus, et le galet, par rapport à la came tournée, occupe la position en pointillé indiquée sur la fig. 100. On obtient la même position relative de la came et du galet dans le cas où, en conservant la came immobile, on fait tourner le poussoir et son galet autour du point O d'un angle φ dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette position du galet est représentée sur la fig. 100 par une circonférence tracée d'un trait continu. Dans cette position, comme pour toute autre position (qu'on peut obtenir en fonction du graphique des espaces parcourus quand le poussoir avec son galet subit des rotations de différents angles dans le sens opposé à la rotation de la came), le galet doit tangenter le profil de la came. En indiquant sur la construction un nombre suffisant de positions du galet, correspondant à différents angles de rotation du poussoir, nous obtenons le profil de la came sous forme de courbe enveloppant les différentes positions du profil du galet obtenues comme on l'a indiqué précédemment.

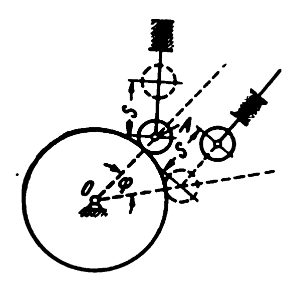


Fig. 100

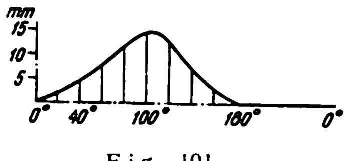


Fig. 101

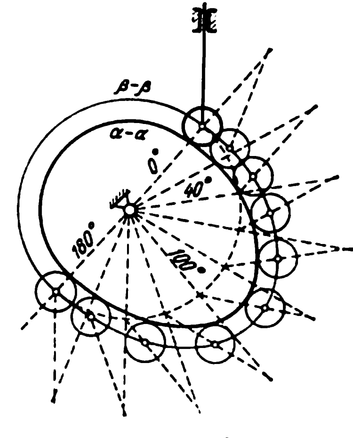


Fig. 102

On a représenté sur la fig. 101 le graphique des espaces parcourus par le poussoir, initialement donné, et sur la fig. 102, le profil empirique $\alpha—\alpha$ de la came tracé d'après ce graphique. Pendant le déplacement du galet sur la came avec ce profil, le centre du profil du galet se déplace sur la courbe $\beta—\beta$. Si le

profil de la came avait été tracé d'après la courbe β—β et que le poussoir sans son galet s'appuyait sur ce profil, alors le déplacement du poussoir s'effectuerait de la même manière que si le galet était présent et s'appuyait sur le profil empirique α—α. La courbe β—β s'appelle profil théorique.

Les profils théorique et empirique sont des courbes équidistantes, c'est-à-dire des courbes qui, l'une par rapport à l'autre, sont

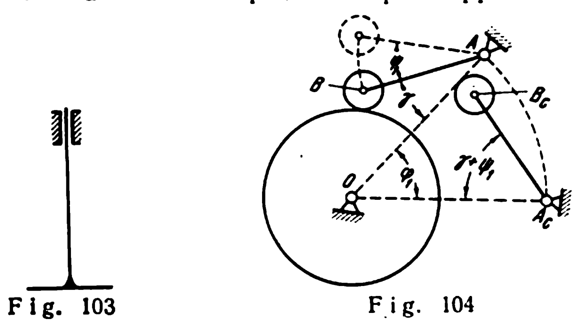


Fig. 103 Fig. 104

également éloignées en tous les points qui se trouvent sur les normales communes. La distance entre les deux profils est égale, comme il est évident, au rayon du galet.

Tout ceci pris en considération, on obtient le profil empirique de la came en traçant toute une série de cercles de rayon égal au rayon du galet et de centres disposés sur le profil théorique. L'enveloppe de toutes ces circonférences donne le profil empirique.

Dans certains cas, l'extrémité du poussoir est exécutée non pas sous forme de galet, mais sous celle de tête (fig. 103). La tête étant un élément aussi bien constructif que cinématique, alors le profil de la came d'après la forme de courbe qui enveloppe la tête dans ses différentes positions par rapport à la came, est aussi bien une courbe théorique que empirique.

Pour tracer le profil empirique de la came d'un mécanisme à chaînon mené *AB* en rotation (fig. 104), il faut connaître le graphique sur lequel l'angle ψ de rotation de la tige *AB* s'exprime en fonction de l'angle de rotation φ de la came. Et dans ce cas aussi, le graphique doit prévoir pour le chaînon mené un mouvement pendant lequel les accélérations excessives ne devraient pas avoir lieu.

Dans ce cas, comme dans le cas précédent, le profil empirique de la came doit être tracé d'après le procédé du mouvement inverse. Supposons que le point *O* soit le centre de rotation du profil de la came (fig. 104), le point *A*—le centre de rotation de la tige *AB*, le point *B*—le centre du profil du galet cylindrique et γ—l'angle entre les droites *OA* et *AB* correspondant à la position initiale

de la tige AB. La rotation de la came est supposée avoir lieu en sens contraire des aiguilles d'une montre.

Pendant la rotation de la came en sens inverse des aiguilles d'une montre d'un angle φ_1, la tige AB conformément au graphique (non indiqué sur le dessin) doit tourner autour du centre A d'un angle ψ_1, et, par conséquent, forme avec la droite OA l'angle $\gamma+\psi_1$; en outre, le galet doit occuper la position indiquée en pointillé sur la fig. 104. Nous obtenons cette disposition du galet par rapport à la came si en conservant la came immobile on fait tourner la droite OA de l'angle φ_1 dans le sens des aiguilles d'une montre tout en le faisant coïncider avec la position OA_c, puis

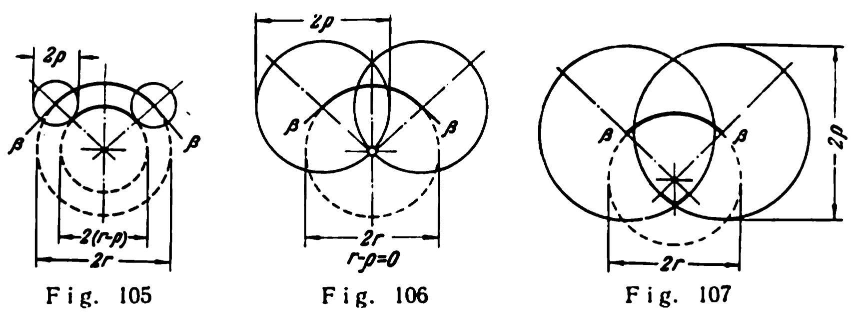


Fig. 105 Fig. 106 Fig. 107

nous inclinons la tige AB avec le galet de l'angle $\gamma+\psi_1$ par rapport à la droite OA_c, après quoi le centre du profil du galet occupe la position B_c. En faisant tourner la droite OA de différents angles dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire dans le sens opposé au sens de rotation de la came, nous obtenons différentes positions du profil du galet par rapport au profil empirique de la came. On obtient le profil empirique de la came sous la forme d'une courbe enveloppant le profil du galet pour ces différentes positions. Le profil théorique, ainsi que pour le mécanisme avec poussoir, s'obtient sous la forme d'une courbe équidistante qui, par rapport au profil empirique, se trouve à une distance égale au rayon du galet.

Quand on projette des mécanismes à cames, il faut faire attention à ce que le rayon du galet ne soit pas supérieur au rayon de courbure en un point quelconque du profil théorique dirigé vers le galet dans le sens de la convexité, puisque dans le cas contraire, le profil empirique ne pourrait pas être tracé. On peut s'en convaincre en se représentant la partie convexe $\beta-\beta$ du profil théorique sous la forme d'un arc de circonférence de rayon r plus grand que le rayon ϱ du galet (fig. 105), avec un rayon r égal à ϱ (fig. 106), et avec un rayon r inférieur à ϱ (fig. 107). Dans le premier cas, le profil empirique est possible, dans le

deuxième cas, on l'obtient sous forme de points et, dans le troisième, sous forme d'une courbe qui se coupe.

Quand on établit un projet de mécanisme à came, on doit résoudre le problème concernant les dimensions les plus rationnelles de la came. Par exemple, pour une came très grande, le mécanisme à poussoir est encore plus grand que cela n'est exigé par la pratique; au contraire, pour une came très petite, le mécanisme peut fonctionner de manière insatisfaisante et pendant son fonctionnement il peut se produire le pincement du poussoir et de la

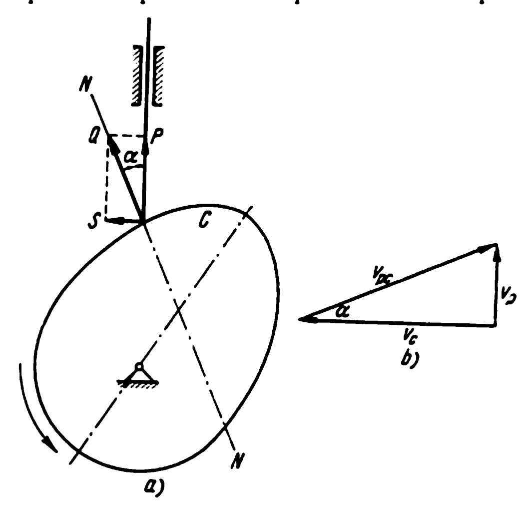


Fig. 108

came ou du guide. Pour le fonctionnement de ce mécanisme, la valeur de l'angle de pression α (fig. 108*a*), angle formé par l'axe du poussoir et la normale NN au profil de la came au point de contact de la came et du poussoir, a une très grande importance. La valeur de cet angle dépend aussi des dimensions de la came. La force Q agissant de la part de la came sur le poussoir, dirigée suivant la normale NN, peut être décomposée suivant la force $P = Q \cos \alpha$ qui fait monter le poussoir, et suivant l'effort latéral $S = Q \sin \alpha$. Plus l'angle α est petit, plus la force P est grande, et plus la force S est petite; par conséquent, du point de vue dynamique, il est préférable d'avoir des angles de pression les plus petits possibles. Or, d'autre part, la dépendance de la vitesse de montée v_p du poussoir en fonction de la vitesse v_c de la came au point de contact de la came avec le poussoir s'exprime de la manière suivante (fig. 108*b*):

$$v_p = v_c \operatorname{tg} \alpha.$$

Par conséquent, du point de vue cinématique, il est préférable d'avoir affaire à de grands angles de pression.

Le choix convenable de la valeur de l'angle de pression représente donc certaines difficultés.

26. ANALYSE CINÉMATIQUE DES MÉCANISMES A CAMES

La détermination des vitesses et des accélérations au cours de l'analyse cinématique des mécanismes à cames peut se faire soit suivant le procédé de dérivation graphique, soit encore par voie de construction des plans de vitesses et d'accélérations.

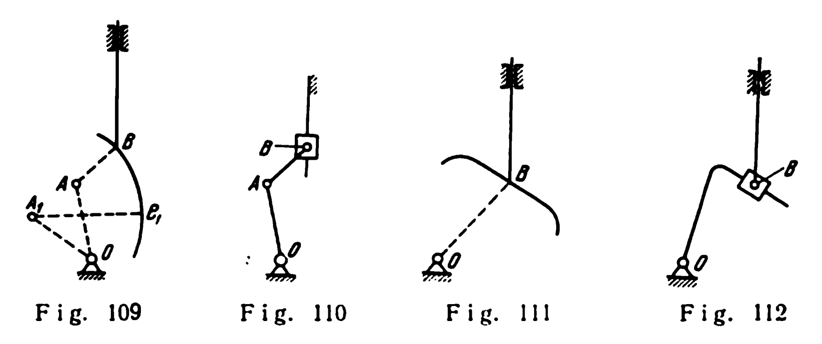


Fig. 109 Fig. 110 Fig. 111 Fig. 112

Pendant la construction des plans de vitesses et d'accélérations, le mécanisme à came, comme tout mécanisme à couple supérieur, doit être remplacé par un mécanisme contenant seulement des couples inférieurs. Pour substituer un couple supérieur par un chaînon à deux couples inférieurs, il faut connaître les rayons de courbure aux points de contact des profils des chaînons du couple supérieur; dans le cas où les profils ne sont pas tracés suivant des courbes données sous forme mathématique, on a recours alors au calcul approché des grandeurs des rayons de courbure.

Pour la substitution des mécanismes à cames par des mécanismes à couples inférieurs, il faut partir des schémas cinématiques des mécanismes. On doit tracer, sur le schéma cinématique de chacun d'eux, le profil théorique de la came sur lequel le chaînon mené doit s'appuyer sur le point qui coïncide avec le centre du profil cylindrique du galet. En fonction de la forme des courbes, d'après lesquelles le profil théorique de la came est tracé, on peut obtenir des mécanismes de rechange de différents types et des mécanismes d'un même type, mais avec des longueurs différentes de chaînons pour certaines positions. Considérons plusieurs exemples.

On a représenté sur la fig. 109 la portion curviligne du profil de la came et le poussoir qui s'appuie ponctuellement sur le profil de la came. Le profil du poussoir est le point B; par conséquent, le centre de courbure du profil du poussoir se trouve au point B. Le point A est le centre de courbure du profil de la came au point B; le point O est le centre de rotation du couple où la came est assemblée à son support. La came de rechange s'obtient sous forme de mécanisme bielle-manivelle, représenté sur la fig. 110, où le poussoir a la forme d'un coulisseau, le chaînon OA d'une manivelle et le chaînon AB d'une bielle. Lorsque le point B_1 du

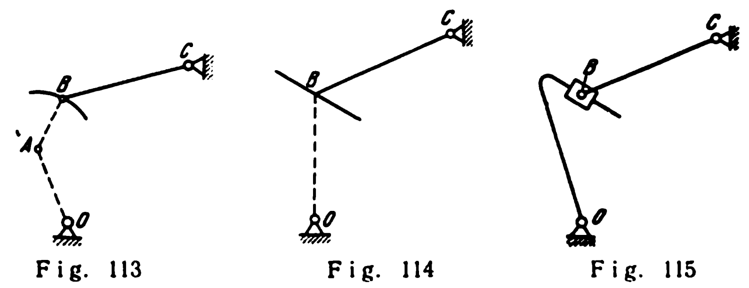


Fig. 113 Fig. 114 Fig. 115

profil de la came (fig. 109) s'approche du poussoir, le croquis du mécanisme de rechange reste inchangé, mais les longueurs de la manivelle OA et de la bielle AB deviennent autres, conséquence de la variation de la grandeur du rayon de courbure A_1B_1.

La fig. 111 représente la partie rectiligne du profil de la came et le poussoir qui s'appuie sur le point B du profil de la came. Le rayon de courbure au point B du profil de la came est infini, d'où, sur la portion rectiligne, on obtient un chaînon à couple de translation et le mécanisme de rechange sous forme de mécanisme à deux couples de rotation et deux couples de translation, représenté sur la fig. 112.

La fig. 113 représente la partie curviligne du profil de la came et la tige BC, animée d'un mouvement circulaire autour du centre C, qui s'appuie par un point sur le profil de la came. Le mécanisme de rechange s'obtient sous forme de mécanisme $OABC$, où le centre de courbure A du profil de la came au point B est le centre de rotation du couple où la manivelle OA et la bielle AB sont assemblées; la tige BC est un balancier pour ce mécanisme. Si la tige BC s'appuyait sur la partie rectiligne du profil de la came (fig. 114), alors, le mécanisme de rechange prendrait une autre forme (fig. 115).

CHAPITRE VI

CALCULS CINÉMATICO-STATIQUES DES MÉCANISMES PLANS

27. OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Pendant le fonctionnement d'un mécanisme sous l'action des forces extérieures, des forces d'inertie surgissent dans les chaînons du mécanisme et des forces de réaction dans le support des chaînons, c'est-à-dire dans les couples cinématiques.

Les intensités, les directions et les points d'application des forces extérieures agissant sur le mécanisme sont dans la théorie des mécanismes et des machines considérés comme donnés, c'est pourquoi les méthodes de leur détermination ne sont pas étudiées dans ce cours.

De même, les méthodes de calcul de la résistance des chaînons et des supports ne sont pas étudiées dans la théorie des mécanismes et des machines; cependant les renseignements nécessaires aux calculs de la résistance, due aux forces d'inertie et des réactions dans les couples cinématiques qui surgissent pendant le fonctionnement d'un mécanisme, sont déterminés par les méthodes exposées dans la théorie des mécanismes et des machines. Parmi les différentes méthodes de détermination de ces forces, nous allons étudier celle qui est la plus commode et qu'on appelle méthode cinématico-statique. Cette méthode consiste en ce qui suit.

Si le corps A en agissant sur le corps B lui communique une accélération, alors le corps B, en opposant une résistance au corps A, agit sur ce dernier suivant une force appelée force d'inertie.

La force d'inertie agit sur le corps qui communique l'accélération, mais non pas sur le corps qui est accéléré. Par exemple, si le corps B retenu par le fil A est en rotation autour d'un axe, alors ce n'est pas le corps B, mais le fil A qui est soumis à l'action de la force d'inertie (appelée force centrifuge); le fil A en écartant continuellement le corps B du mouvement rectiligne lui communique une accélération. A la rupture du fil A, sous l'action de la force centrifuge, le corps B se déplace non pas

radialement, c'est-à-dire suivant la ligne d'action de la force d'inertie, mais suivant la tangente à la trajectoire sur laquelle le corps *B* se déplaçait jusqu'à l'instant de rupture du fil car ni avant la rupture, ni à l'instant de la rupture, le corps *B* n'est soumis à l'action de la force centrifuge.

La force d'inertie relative au corps qui s'accélère ne peut être déplacée que conventionnellement. Si par convention toutes les forces d'inertie sont déplacées sur les corps qui s'accélèrent d'un système quelconque en mouvement, alors d'après le principe de d'Alembert le système en mouvement à l'instant considéré peut être supposé au repos et se trouvant à l'état d'équilibre sous l'action de toutes les forces, y compris les forces d'inertie. Ce principe est pris comme base de la méthode cinématico-statique. La méthode a reçu le nom de cinématico-statique parce que les efforts dans les chaînons et les pressions dans les couples cinématiques du mécanisme, qui surgissent pendant l'action des forces extérieures agissant sur le mécanisme, sont déterminés d'abord en tant que résultat de l'analyse cinématique du mécanisme pendant laquelle on trouve les accélérations nécessaires pour déterminer les forces d'inertie, puis du calcul statique.

28. DÉTERMINATION DES FORCES D'INERTIE

Pendant le mouvement d'un chaînon du mécanisme, tous les points matériels en mouvement accéléré agissent avec des forces d'inertie sur les points matériels voisins. Sous l'action mutuelle des forces extérieures et des forces d'inertie élémentaires, des tensions apparaissent dans les chaînons. Les forces agissant sur les chaînons sont équilibrées par les réactions qui surgissent dans les supports des chaînons, c'est-à-dire dans les couples cinématiques.

Les tensions qui apparaissent dans les chaînons sous l'action des forces ne sont pas étudiées dans la théorie des mécanismes et des machines car comme il a déjà été dit ci-dessus, dans la théorie des mécanismes et des machines les méthodes des calculs des chaînons à la résistance ne sont pas exposées. C'est pourquoi, dans la suite, la force d'inertie sera prise en considération seulement au cas où on aura à déterminer la pression dans les couples cinématiques.

De plus, il est nécessaire dans la pratique de remplacer une infinité de forces d'inertie élémentaires agissant dans les chaînons par la résultante générale des forces et par des couples. Plus bas, on expliquera par quelles résultantes générales des forces et par quels couples peut-on remplacer toutes les forces d'inertie élémentaires agissant dans les chaînons.

En remplaçant les forces élémentaires par leurs résultantes générales, il faut nécessairement avoir en vue qu'aucune résultante générale réelle des forces n'existe ni en technique, ni dans la nature. La résultante générale est une force fictive; si elle avait existé et agi seule, elle aurait produit les mêmes pressions dans les supports des chaînons que toutes les forces élémentaires réelles.

Pour déterminer la résultante générale des forces, nous devons calculer son intensité, sa ligne d'action et son sens. Pour la détermination des pressions dans les supports des chaînons, le point d'application de la résultante générale sur la ligne d'action n'intervient pas puisque, sur la ligne d'action, la résultante générale peut glisser jusqu'à un point quelconque. Ce déplacement du point d'application ne peut avoir d'influence ni sur les intensités et les directions des moments engendrés par la résultante générale par rapport aux différents points du chaînon, ni sur les intensités et les directions des réactions dans les couples cinématiques.

Dans certains cas, il s'avère plus avantageux de déplacer la ligne d'action de la résultante générale parallèlement à elle-même d'une certaine longueur. Ce déplacement n'exercera aucune influence sur les intensités et les directions de réactions dans les couples cinématiques seulement si on change en même temps l'intensité et la direction du moment de la résultante générale du couple. En déplaçant de cette manière la ligne d'action de la résultante générale des forces élémentaires d'inertie, on peut réduire l'action mutuelle des forces et des couples sur les chaînons à l'action d'une seule force.

Par la suite, en déterminant les intensités, les sens et les lignes d'action des résultantes générales des forces d'inertie pour différents types de mouvements plans, nous partirons de la supposition que le corps en mouvement possède au moins un plan de symétrie, c'est-à-dire un plan des deux côtés duquel toutes les forces d'inertie élémentaires sont disposées symétriquement. Quand nous représenterons un corps, nous indiquerons sur le croquis son plan de symétrie et nous supposerons que tous les points du corps se déplacent parallèlement à ce plan. En marquant sur le croquis le point d'application d'une force d'inertie élémentaire, nous supposerons qu'en ce point toutes les forces d'inertie élémentaires agissant en des points qui se trouvent sur la droite perpendiculaire au plan de symétrie correspondant à ce point, sont déplacées parallèlement à elles-mêmes. Par exemple, le corps représenté par les deux vues sur la fig. 116 possède un plan de symétrie pendant le mouvement parallèle au plan de la fig. 116 *a* ou perpendiculairement au plan du croquis de la fig. 116 *b*. Dans ce cas par force élémentaire d'inertie appliquée au point x (fig. 116 *a*), il faut avoir en vue la somme de toutes les forces élémentaires d'inertie agis-

sant sur tous les points matériels de la droite $x-x$ (fig. 116 *b*) et déplacées parallèlement à elles-mêmes dans le plan de symétrie. Sur la fig. 116 *a*, on a représenté la section du corps par le plan de symétrie, sur la fig. 116 *b*, la droite $a-a$ est la droite d'intersection du plan de la figure avec le plan de symétrie.

Pendant le mouvement de ce corps dans la direction perpendiculaire au plan de croquis, le corps en mouvement, représenté sur la fig. 116 *a*, ne possède pas de plan de symétrie.

La détermination des forces d'inertie engendrées par le mouvement des corps ayant plusieurs plans de symétrie sort du cadre du présent cours.

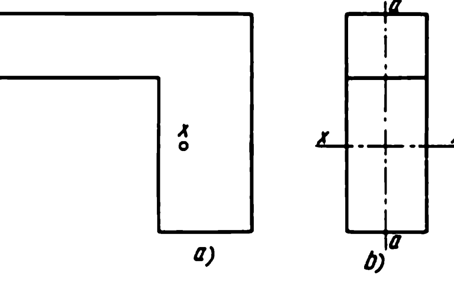


Fig. 116

Le chaînon d'un mécanisme plan peut être animé d'un mouvement de translation, d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe ou d'un mouvement composé. Dans tous ces cas, la force d'inertie, comme nous l'enseigne la mécanique rationnelle, est égale au produit de la masse du chaînon par l'accélération de son centre de gravité et est dirigée en sens inverse de l'accélération du centre de gravité.

Pour le mouvement de translation, la ligne d'action de la force d'inertie passe par le centre de gravité, pour le mouvement de rotation à vitesse angulaire non uniforme, elle passe par le centre de roulement situé sur le prolongement de la droite qui passe par le centre de gravité et le centre de rotation, et distant du centre de rotation de r_k avec

$$r_k = r_S + \frac{J_S}{m r_S} = r_S + \frac{\varrho^2}{r_S},$$

où r_S est le rayon de rotation du centre de gravité;

J_S — le moment d'inertie du chaînon par rapport à son centre de gravité;

m — la masse du chaînon;

ϱ — le rayon de giration qui est égal à $\sqrt{\frac{J_S}{m}}$.

Pour le mouvement de rotation avec une vitesse angulaire constante, l'accélération totale du centre de gravité est égale à l'accélération normale et, par suite, la ligne d'action de la force d'inertie coïncide avec le rayon de rotation du centre de gravité.

Le mouvement composé d'un chaînon peut se décomposer en mouvement accéléré d'un point du chaînon choisi arbitrairement et en mouvement de rotation autour de ce point. Dans ce cas, la force totale d'inertie $\vec{P}_i$ est la somme géométrique de deux forces; la force d'inertie $\vec{P}_i'$ relative au mouvement avec accélération du point choisi et la force d'inertie $\vec{P}_i''$ relative au mouvement de rotation du chaînon autour de ce point. En menant par le centre de gravité du chaînon la ligne d'action de la force $\vec{P}_i'$ parallèlement au vecteur accélération du point choisi et par le centre de roulement la ligne d'action de la force $\vec{P}_i''$ parallèlement à l'accélération du centre de gravité due au mouvement de rotation du chaînon autour du point choisi, nous obtenons au point d'intersection de ces droites le point par lequel passe la ligne d'action de la force totale d'inertie $\vec{P}_i$. Le vecteur représentant cette force doit être dirigé parallèlement au vecteur accélération absolue du centre de gravité et orienté dans le sens inverse de ce vecteur.

Exemple 1. Le chaînon *BC* (fig. 117 *a*) est animé d'un mouvement composé. Déterminer l'intensité de la force d'inertie, sa ligne d'action et son sens à l'aide des données suivantes :

1) la masse du chaînon *m* ; 2) le moment d'inertie J_S du chaînon par rapport au centre de gravité ; 3) les accélérations $\vec{a}_B$ et $\vec{a}_C$; 4) la position du centre de gravité *S*.

Construisons le plan des accélérations (fig. 117 *b*) d'après les accélérations données $\vec{a}_B$ et $\vec{a}_C$. Après avoir déterminé sur le plan des accélérations la position du point *S* et en construisant sur la droite *bc* le triangle *bsc*, semblable au triangle *BSC* du chaînon et de même configuration que ce triangle, on obtient les vecteurs $\vec{bs}$ et $\vec{cs}$ des accélérations relatives. Menons le vecteur $\vec{\pi s}$ représentant l'accélération absolue $\vec{a}_S$ du centre de gravité.

Décomposons le mouvement composé du chaînon *BC* comme étant en mouvement avec le point *B* et en mouvement de rotation autour de ce point. La force totale d'inertie $\vec{P}_i$ est la somme géométrique de la force d'inertie due au mouvement du chaînon avec le point *B* et de la force d'inertie $\vec{P}_i''$ due au mouvement de rotation du chaînon autour du point *B*.

Le premier de ces termes est égal à :

$$P_i' = -ma_B.$$

Nous multiplions la masse du chaînon par l'accélération a_B et non pas par l'accélération a_S, car dans le mouvement de translation avec le point *B* les accélérations de tous les points du chaînon aussi bien que l'accélération du centre de gravité sont égales à l'accélération du point *B*.

La force $\vec{P}_i'$ doit être appliquée au centre de gravité. Sans calculer l'intensité de cette force, menons, par le centre de gravité *S*, la ligne d'action parallèlement au vecteur $\vec{\pi b}$ représentant l'accélération a_B (fig. 117 *b*).

Le second terme est égal à

$$P_i'' = -ma_{SB}.$$

Cette force doit être appliquée au centre de roulement K (fig. 117 *a*) qui se trouve sur le prolongement de la droite BS et est distant de l_{SK} du point S avec

$$l_{SK} = \frac{J_S}{ml_{BS}},$$

où l_{BS} est la longueur du segment BS.

Sans calculer l'intensité de la force P_i'', menons par le centre de roulement K la ligne d'action de cette force parallèlement au vecteur $\overrightarrow{bs}$ représentant l'accélération $\overrightarrow{a}_{SB}$.

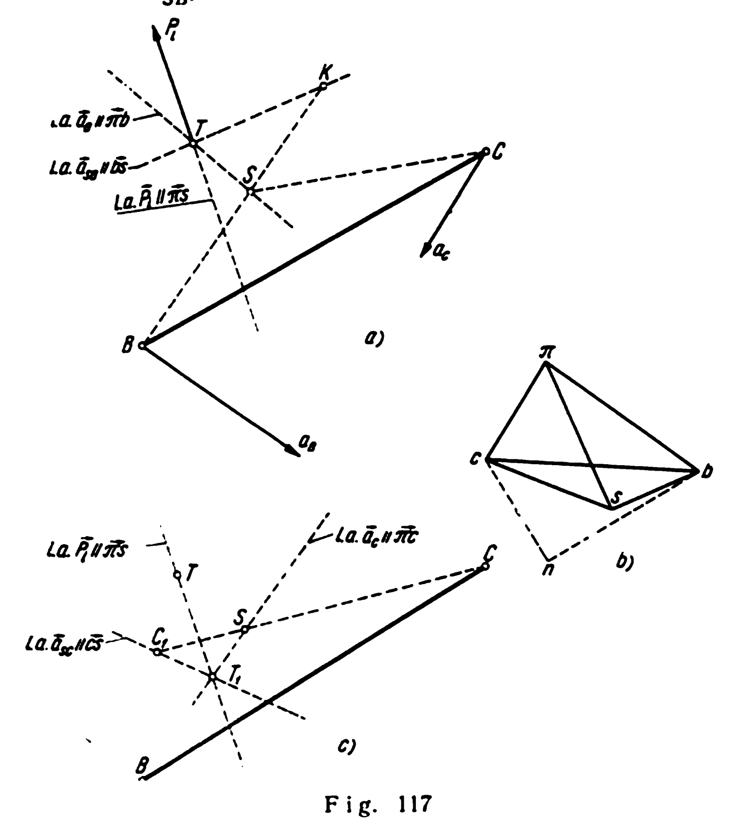


Fig. 117

Les lignes d'action des forces $\overrightarrow{P}_i'$ et $\overrightarrow{P}_i''$ se coupent au point T. Pour déterminer l'intensité, le sens et le point d'application de la résultante générale $\overrightarrow{P}_i$ nous aurions dû déplacer suivant leur ligne d'action les vecteurs, représentant ces forces jusqu'au point T que nous avons obtenu sans avoir

eu recours aux calculs des longueurs des vecteurs. En déterminant le point d'application de la résultante générale $\vec{P}_i$, menons du point T le vecteur représentant cette force parallèlement et en sens opposé au vecteur $\vec{\pi s}$ (fig. 117 *b*) représentant l'accélération absolue $\vec{a}_S$ du centre de gravité. On a $P_i = ma_S$.

Sur la fig. 117 *a*, nous avons déterminé la ligne d'action et la direction de la force $\vec{P}_i$ en décomposant le mouvement composé du chaînon BC en mouvement de translation avec le point B et en mouvement de rotation autour du point B. En décomposant le mouvement composé du chaînon BC en mouvement de translation avec le point C et en mouvement de rotation autour du point C, on trouve que le centre de roulement K_1' appartient au prolongement de la droite CS (fig. 117 *c*) et est distant de l_{SK_1} du centre de gravité S avec

$$l_{SK_1} = \frac{J_S}{ml_{CS}}.$$

En menant par le point S la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_C$ parallèlement au vecteur $\vec{\pi c}$ du plan des accélérations et par le point K_1 la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_{SC}$ parallèlement au vecteur $\vec{sc}$, nous déterminons le point T_1 à leur intersection sur la même ligne d'action de la force $\vec{P}_i$ que nous avons obtenue dans la construction précédente sur la fig. 117 *a*.

En choisissant, au lieu des points B et C, un point quelconque du chaînon BC (ne coïncidant pas avec le centre de gravité), nous trouvons le point d'intersection des lignes d'action des forces $\vec{P}_i'$ et $\vec{P}_i''$ en un autre point mais toujours sur la ligne d'action de la force $\vec{P}_i$ des deux constructions précédentes. Mais, si on décompose le mouvement du chaînon BC en mouvement de translation avec le centre de gravité et en mouvement de rotation autour du centre de gravité, alors toutes les forces d'inertie élémentaires ne peuvent pas être réduites à une seule résultante générale. Dans ce cas la force $P_i' = -ma_S = P_i$ doit être appliquée au centre de gravité, tandis que la force P_i'' est nulle, car pendant le mouvement autour du centre de gravité les forces élémentaires d'inertie, comme nous l'enseigne la mécanique théorique, se réduisent à un couple de moment $-J_S\varepsilon$, où $\vec{\varepsilon}$ est l'accélération angulaire du chaînon. On peut déterminer l'accélération angulaire $\vec{\varepsilon}$ du chaînon BC en décomposant l'accélération $\vec{a}_{CB}$ (vecteur $\vec{bc}$ de la fig. 117 *b*) en accélération normale $\vec{a}_{CB}^n$ (vecteur $\vec{bn}$ de la fig. 117 *b*, parallèle au chaînon BC) et en accélération tangentielle $\vec{a}_{BC}^\tau$ (vecteur $\vec{nc}$ de la fig. 117 *b*, perpendiculaire au chaînon BC) tout en tenant compte que

$$\varepsilon = a_{CB}^\tau : l_{BC} = (nc)\,\mu_a : l_{BC},$$

où μ_a est l'échelle du plan d'accélération et l_{BC}, la longueur du chaînon BC.

Le sens de l'accélération angulaire est déterminé en déplaçant sur la fig. 117 *a* le vecteur $\vec{nc}$ parallèlement à lui-même jusqu'au point C; en faisant coïncider sur la fig. 117 *a* le point n du vecteur avec le point C, on trouve que le sens de l'accélération angulaire est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

29. DÉTERMINATION DES PRESSIONS DANS LES COUPLES CINÉMATIQUES

Puisque chaque mécanisme de classe I et du deuxième ordre est constitué d'un mécanisme de classe I et du premier ordre et d'un ou de plusieurs groupes à double guidage successivement adjoints, la définition des pressions dans les couples doit être donnée par voie de séparation successive du mécanisme, des groupes à double guidage à partir du dernier adjoint. Pendant la détermination de la pression dans les couples de certains groupes, l'action des chaînons dans les articulations décomposées est remplacée par des forces. Ainsi, si on demande de déterminer les pressions dans les couples du mécanisme à huit chaînons représenté sur la fig. 118, il faut commencer par le dernier groupe adjonctif, c'est-à-dire par le groupe *B"C"D"*. Après avoir déterminé les pressions dans les couples de ces groupes et remplacé l'action des chaînons *B"C"* et *C"D"* sur les chaînons *BC* et *B'C'* par des forces appliquées aux points *B"* et *D"*, il faut passer au groupe *B'C'D'*. Quand on détermine les pressions dans les couples de ces groupes en plus des forces données, on doit prendre en considération la force agissant au point *D"* due au chaînon *C"D"* appartenant au groupe précédent. Après avoir séparé le groupe *B'C'D'*, les pressions dans les couples du groupe séparé *BCD* doivent être déterminées en incluant les forces agissant aux points *B"* et *B'* dues aux chaînons des groupes précédents.

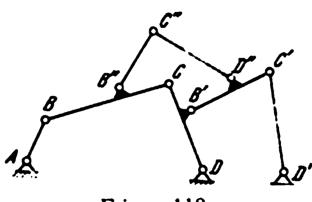


Fig. 118

Après avoir séparé le groupe *BCD* et déterminé les pressions dans les couples de ce groupe, il faut considérer la manivelle *AB*. Après avoir appliqué au point *B* de ce chaînon la force avec laquelle le chaînon *BC* agit sur la manivelle *AB*, il ne restera plus qu'à déterminer l'intensité du moment qui doit équilibrer l'action du chaînon *BC* sur la manivelle et déterminer la pression dans le dernier couple *A*.

Ainsi, la pression dans les couples, même pour un mécanisme très compliqué de classe I et du deuxième ordre, se ramène à la détermination des pressions dans les couples où l'on a éliminé successivement du mécanisme les groupes à double guidage. La détermination des pressions dans des couples des groupes à double guidage ne peut se heurter à des difficultés, car le groupe à deux chaînons et à trois couples inférieurs est un système statiquement déterminé, étant donné que pour la détermination de six inconnues (deux inconnues pour chaque couple cinématique), on peut

utiliser les six équations d'équilibre (trois équations pour chaque paire de chaînons). Pour chaque couple on a les deux inconnues suivantes: pour le couple de rotation le point d'application de la force (centre d'articulation) est connu, mais l'intensité et la direction sont inconnues; pour le couple de translation on connaît la direction de la force (perpendiculaire à la glissière), mais l'intensité et le point d'application sont inconnus.

Pour déterminer les pressions dans les couples des groupes à double guidage, il est préférable d'employer la méthode des plans des forces. Examinons cette méthode pour la détermination des pressions dans les couples des groupes à trois couples de rotation et des groupes à deux couples de rotation et à un couple de translation.

A. Groupe à trois couples de rotation

Si plusieurs forces et plusieurs couples de force agissent sur un chaînon, alors, par voie de composition, toutes les forces et tous les couples peuvent être réduits à une seule force et à un seul couple. Si les chaînons se trouvent sous l'action de la force P et

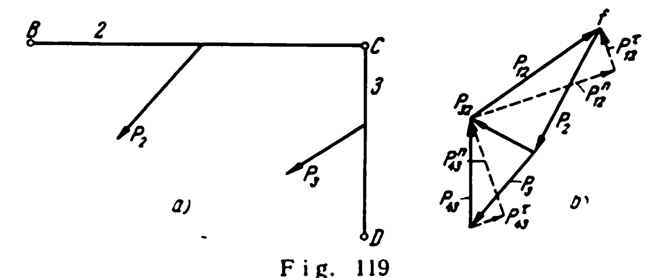


Fig. 119

du couple de moment M, l'action du couple et de la force sur le chaînon peut être alors remplacée, comme nous l'enseigne la mécanique théorique, par l'action d'une seule force. C'est pourquoi, en considérant le cas général, nous supposerons dans la suite que chaque chaînon du groupe se trouve sollicité par une force unique. Lors de la détermination de l'intensité, de la ligne d'action et du sens sur cette ligne d'action de cette force, on doit tenir compte de toutes les forces et tous les couples y compris les forces d'inertie.

En désignant par P_2 (fig. 119 *a*) la force agissant sur le chaînon BC et par P_3 celle qui agit sur le chaînon CD, nous allons déterminer les pressions dans les couples B, C et D. L'indice de la lettre P indique le numéro du chaînon sur lequel agit la force extérieure donnée. Convenons de noter l'action d'un chaînon sur un autre chaînon par la lettre P munie de deux indices, le pre-

mier indiquant le numéro du chaînon dont la force agit, et le second, le numéro du chaînon sur lequel la force agit.

Ainsi, P_{23} est la force qui agit de la part du chaînon numéro deux sur le chaînon numéro trois, P_{32}, la force qui agit de la part du chaînon numéro trois sur le chaînon numéro deux. Nous considérerons qu'au point B le groupe est en liaison avec le chaînon numéro un non représenté sur la figure, et au point D, avec le chaînon numéro quatre; conformément à ceci, les forces appliquées aux points B et D seront notées P_{12}, P_{43} ou P_{21}, P_{34} en fonction du chaînon-origine de l'action des forces considérée.

Faisant partie du mécanisme, le groupe BCD se trouve en mouvement, mais puisque pendant la détermination des forces P_2 et P_3 on a pris en considération et déplacé conventionnellement les forces d'inertie sur les chaînons des groupes, alors à l'instant correspondant à la position du groupe représentée sur la fig. 119 *a*, le groupe, d'après la loi de d'Alembert, peut être considéré en équilibre sous l'action de toutes les forces extérieures. Le groupe se trouve sous l'action de quatre forces: deux forces actives P_2 et P_3 et deux réactions P_{12} et P_{43}.

Si un système plan se trouve en équilibre sous l'action des forces extérieures, alors les vecteurs représentant ces forces disposés successivement les uns derrière les autres forment, comme on le sait, une ligne polygonale fermée; dans cette ligne polygonale fermée, tout vecteur arbitraire est un vecteur qui représente une force équilibrant l'action des autres forces. La ligne polygonale fermée composée des vecteurs correspondant à un système de forces en équilibre s'appelle plan des forces.

Nous ne pouvons pas construire d'emblée le plan des forces relatif au groupe BCD, étant donné que les intensités et les directions des réactions P_{12} et P_{43} ne sont pas données, mais cette difficulté peut être éliminée de la manière suivante.

Sans connaître l'intensité et la direction de la force P_{12} nous pouvons déterminer la composante de cette force suivant la direction perpendiculaire au chaînon BC. Notons cette composante par P_{12}^{τ} et par P_{12}^{n} la composante dans la direction du chaînon BC, l'intensité de la force P_{12}^{τ} est déterminée à partir de l'équation des moments par rapport au point C, puisque le moment de la force P_{12}^{n} dirigée suivant le chaînon BC est nul, alors, le moment de la force P_2 est équilibré seulement par le moment de la force P_{12}^{τ}. Donc,

$$P_{12}^{\tau} \cdot l_{BC} = P_2 \, h_2,$$

d'où $P_{12}^{\tau} = P_2 \frac{h_2}{l_{BC}}$, où h_2 est le bras de levier de la force P_2 donné sur le croquis.

Le moment de la force P_2 tend à faire tourner le chaînon *BC* autour du point *C* en sens inverse des aiguilles d'une montre et par conséquent, le moment de la force P^{τ}_{12} doit être dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre, et par conséquent, la force P^{τ}_{12} doit être dirigée perpendiculairement au chaînon *BC* de bas en haut.

En décomposant la force P_{43} en composante P^{τ}_{43} dirigée suivant la perpendiculaire au chaînon *CD* et en composante P^{n}_{43} dirigée suivant le chaînon *CD*, de l'équation des moments par rapport au point *C* on trouve que

$$P^{\tau}_{43}P_3 = \frac{h_3}{l_{CD}},$$

où h_3 est le bras de levier de la force P_3 donné sur le croquis.

Après avoir décomposé des forces P^{τ}_{12} et P^{τ}_{43} en deux composantes et après avoir déterminé les intensités et les directions des forces P^{τ}_{12} et P^{τ}_{43}, on obtient six forces sous l'action desquelles le groupe *BCD* doit se trouver en équilibre. Les vecteurs représentant quatre de ces forces P_2, P_3, P^{τ}_{12} et P^{τ}_{43} sont connus en intensité et en direction, et les vecteurs représentant les forces P^{n}_{12} et P^{n}_{43} sont donnés seulement d'après leur ligne d'action. En disposant de ces données, on peut construire le plan des forces en partant de l'équation vectorielle suivante:

$$\vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}^{\tau}_{43} + \vec{P}^{n}_{43} + \vec{P}^{n}_{12} + \vec{P}^{\tau}_{12} = 0.$$

La construction peut être réalisée de la manière suivante (fig. 119 *b*):

1. En partant d'un point arbitraire *f* du croquis, que nous appellerons pôle du plan, menons successivement les trois premiers termes de l'équation vectorielle, c'est-à-dire ajoutons successivement l'un à l'autre les vecteurs $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ et $\vec{P}^{\tau}_{43}$.

2. Puisque l'intensité de force $\vec{P}^{n}_{43}$ est inconnue et que seule sa ligne d'action est connue, alors de l'extrémité du dernier vecteur, c'est-à-dire du vecteur $\vec{P}^{\tau}_{43}$, menons la ligne d'action du vecteur $\vec{P}^{n}_{43}$; cette droite doit être parallèle au chaînon *CD*, donc perpendiculaire au vecteur $\vec{P}^{\tau}_{43}$.

3. N'ayant plus la possibilité de continuer la construction du plan des forces dans l'ordre que nous avons choisi, c'est-à-dire dans l'ordre défini par l'ordre des termes de l'équation vectorielle,

passons au dernier terme de cette équation et menons le vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$; ce vecteur étant le dernier terme de l'équation, il doit donc fermer la ligne polygonale ; nous dirigeons son extrémité par conséquent vers le pôle.

4. L'avant-dernier vecteur $\vec{P}^{n}_{12}$ de l'équation est connu seulement d'après sa ligne d'action, donc de l'origine du vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$ menons la ligne d'action du vecteur $\vec{P}^{n}_{12}$ parallèlement au chaînon BC ou, ce qui revient au même, perpendiculairement au vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$.

Comme le groupe BCD se trouve en équilibre, les vecteurs doivent former une ligne polygonale fermée et le point d'intersection des lignes d'action des vecteurs $\vec{P}^{n}_{43}$ et $\vec{P}^{n}_{12}$ est donc l'extrémité du vecteur $\vec{P}^{n}_{43}$ et aussi l'origine du vecteur $\vec{P}^{n}_{12}$. Ainsi, les intensités inconnues des forces $\vec{P}_{12}$ et $\vec{P}_{43}$ sont déterminées.

La pression dans le couple B, créée par l'action de premier chaînon sur le deuxième chaînon, s'obtient comme le résultat de la composition géométrique des forces $\vec{P}^{n}_{12}$ et $\vec{P}^{\tau}_{12}$; le vecteur résultant de ces forces s'obtient en réunissant, sur le plan des forces, l'origine du vecteur $\vec{P}^{n}_{12}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$ et en orientant le segment ainsi obtenu en sens inverse des vecteurs $\vec{P}^{n}_{12}$ et $\vec{P}^{\tau}_{12}$.

La pression dans le couple D s'obtient par la composition géométrique des vecteurs $\vec{P}^{\tau}_{43}$ et $\vec{P}^{n}_{43}$; le segment de droite, qui réunit l'extrémité de ce dernier vecteur à l'origine du premier vecteur et orienté dans le sens inverse des composantes, est le vecteur-force $\vec{P}_{43}$.

Les forces extérieures $\vec{P}_{2}$ et $\vec{P}_{3}$ avec les réactions $\vec{P}_{12}$ et $\vec{P}_{43}$ agissant sur le groupe BCD doivent former une ligne polygonale fermée orientée dans le même sens ; c'est ce qui a lieu sur le plan des forces que nous venons de construire.

En construisant le plan des forces, nous n'avons pas déterminé la pression agissant dans le couple C, vue que la force agissant de la part d'un chaînon sur un autrechaînon n'est pas une force extérieure agissant sur le groupe BCD, puisque à l'intérieur du groupe la force $\vec{P}_{23}$ s'équilibre avec la force $\vec{P}_{32}$ qui lui est égale et de sens opposé. Pour déterminer l'intensité et la direction de

la force avec laquelle un des chaînons du groupe exerce une pression sur un autre chaînon, il faut construire le plan des forces pour un chaînon quelconque.

Le chaînon BC se trouve en équilibre sous l'action de trois forces $\vec{P}_2$, $\vec{P}_{12}$ et la force encore inconnue $\vec{P}_{32}$. Le plan des forces relatif au chaînon BC doit constituer un triangle formé par les vecteurs représentant ces forces. En prenant en considération que dans le plan des forces, que nous venons de construire, les deux premiers vecteurs sont déjà menés, nous pouvons sur ce même plan mener le vecteur $\vec{P}_{32}$ en réunissant l'extrémité du vecteur $\vec{P}_2$ à l'origine du vecteur $\vec{P}_{12}$ et en orientant le segment ainsi obtenu de manière que son orientation coïncide avec celle des vecteurs $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_{12}$. En faisant subir au vecteur $\vec{P}_{32}$ une rotation de 180°, on obtient le vecteur $\vec{P}_{23}$. Nous aurons obtenu les mêmes vecteurs $\vec{P}_{23}$ et $\vec{P}_{32}$ en considérant l'équilibre du chaînon CD.

Pendant la construction du plan des forces, il sera utile de mener successivement les vecteurs dans l'ordre que nous avons indiqué plus haut. Il est aisé de se convaincre que si sur l'extrémité du vecteur $\vec{P}_3$ on construit le vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$, au lieu de construire le vecteur $\vec{P}^{\tau}_{43}$, et si on construit ce dernier vecteur à partir du pôle f, alors pour déterminer la pression dans le couple C, on doit construire séparément le plan des forces pour un chaînon quelconque.

B. Groupe à deux couples de rotation et à un couple extrême de translation

Ce groupe (fig. 120 a) entre dans la composition du mécanisme bielle-manivelle qui, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, est très répandu en technique.

En désignant par P_2 la force qui agit sur le deuxième chaînon (chaînon BC) et par P_3 la force agissant sur le troisième chaînon (coulisseau), déterminons les pressions dans les couples BC et dans le couple de translation CC_x, où C_x est un point fixe de la glissière $x - x$ appartenant au quatrième chaînon fixe extérieur au groupe.

Les forces P_2 et P_3 sont données par leurs intensités, leurs lignes d'action et leurs sens sur les lignes d'action. La réaction P_{12} dans le couple B est inconnue en intensité et en direction, son point d'application étant connu. La réaction P_{43}, c'est-à-dire la force due à l'action de la glissière sur le coulisseau, ne peut être

orientée seulement que suivant la perpendiculaire à la glissière, son intensité et son point d'application étant inconnus.

En décomposant la force $\vec{P}_{12}$ en composantes $\vec{P}^{\tau}_{12}$ et $\vec{P}^{n}_{12}$ et en déterminant l'intensité et la direction de la force P^{τ}_{12}, comme on l'a fait précédemment, on déduit de la condition d'équilibre du groupe l'équation vectorielle

$$\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_{43}+\vec{P}^{n}_{12}+\vec{P}^{\tau}_{12}=0,$$

où le premier, le deuxième et le dernier vecteur sont connus en intensité et en direction, tandis que le troisième et le quatrième seulement en direction.

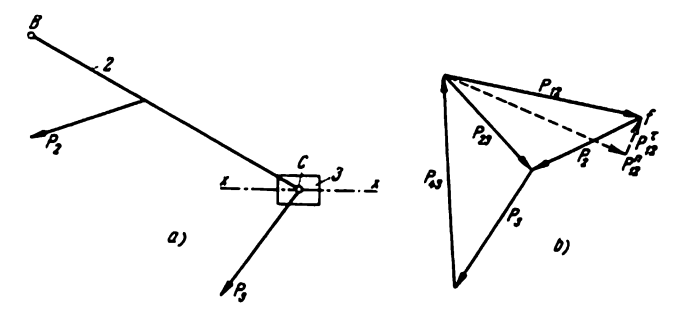


Fig. 120

On construit le plan des forces dans l'ordre que voici (fig. 120 *b*) :

1) menons du pôle *f* les vecteurs $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$;

2) sur l'extrémité du vecteur $\vec{P}_3$ menons la ligne d'action de la force $\vec{P}_{43}$ perpendiculairement à la glissière $x—x$;

3) prolongeons l'extrémité du vecteur $\vec{P}_2$ (le point *f*) par le vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$; le sens de ce vecteur doit être celui qui l'oriente vers l'origine du vecteur $\vec{P}_2$ (le point *f*) car, étant le dernier vecteur de l'équation, il doit fermer la ligne polygonale;

4) construisons sur l'origine du vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$ la ligne d'action de la force $\vec{P}^{n}_{12}$ perpendiculairement au vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$.

Au point d'intersection des lignes d'action se trouvent l'extrémité du vecteur $\vec{P}_{43}$ et l'origine du vecteur $\vec{P}^{n}_{12}$.

On obtient le vecteur $\vec{P}_{12}$ (la pression dans le couple *B*) en réunissant l'origine du vecteur $\vec{P}^{n}_{12}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{P}^{\tau}_{12}$.

On doit orienter le segment ainsi obtenu en sens inverse de celui des deux autres vecteurs. Le vecteur $\vec{P}_{43}$ est le vecteur-force de l'action de la glissière sur le coulisseau.

La pression dans le couple C peut être déterminée, comme nous l'avons indiqué plus haut, en partant de la condition d'équilibre du chaînon BC ou du coulisseau.

C. Calcul cinématico-statique de la manivelle

Après la détermination des pressions dans les couples des chaînons menés du mécanisme, on détermine l'intensité et la direction de la force $\vec{P}_{21}$ avec laquelle le chaînon agit sur la manivelle qui lui est reliée.

Dans la plupart des cas, l'énergie reçue par le mécanisme est transmise du moteur à l'arbre A (fig. 121) de la manivelle, et c'est pourquoi l'arbre de la manivelle doit se trouver en équilibre sous l'action du moment créé par le moteur d'une part et le moment résultant de toutes les forces extérieures agissant sur la manivelle y compris la force $\vec{P}_{21}$, d'autre part. Si la manivelle se trouve seulement sous l'action de la force $\vec{P}_{21}$ et de la force centrifuge d'inertie conventionnellement déplacée jusqu'à elle, alors le moment dû au moteur sera égal à $M = -\vec{P}_{21} \cdot h_{21}$, où h_{21} est le bras de levier de la force P_{21}.

Fig. 121

Pendant la détermination de la pression dans le couple A, c'est-à-dire de la force $\vec{P}_{41}$ due à l'action du chaînon fixe (quatrième) sur la manivelle (premier chaînon), on doit mener sur le plan des forces le vecteur $\vec{P}_{21}$, les vecteurs de toutes les forces données agissant sur la manivelle et la force d'inertie conventionnellement déplacée jusqu'à la manivelle. Le vecteur devant déterminer la force $\vec{P}_{41}$ doit réunir l'extrémité du dernier vecteur avec l'origine du premier.

D. Exemples numériques d'analyse cinématique et de calculs cinématico-statiques

Exemple 1. Déterminer la pression due à la force d'inertie dans les couples cinématiques d'un mécanisme articulé à quatre chaînons se trouvant dans la position représentée sur la fig. 122 *a* d'après les données suivantes :

1) Les longueurs des chaînons : $l_{AB} = 50$ mm ; $l_{BC} = 120$ mm ; $l_{CD} = 100$ mm; $l_{AD} = 120$ mm ;

2) Les positions des centres de gravité S des chaînons: $l_{AS_1}=20$ mm; $l_{BS_2}=60$ mm; $l_{DS_3}=50$ mm;

3) Les moments d'inertie J du deuxième et du troisième chaînon par rapport aux axes passant par le centre de gravité: $J_2=J_3=5\cdot10^{-4}$ kg·m·s²;

4) Le poids G des chaînons: $G_1=1{,}5$ kg; $G_2=3$ kg; $G_3=2{,}5$ kg;

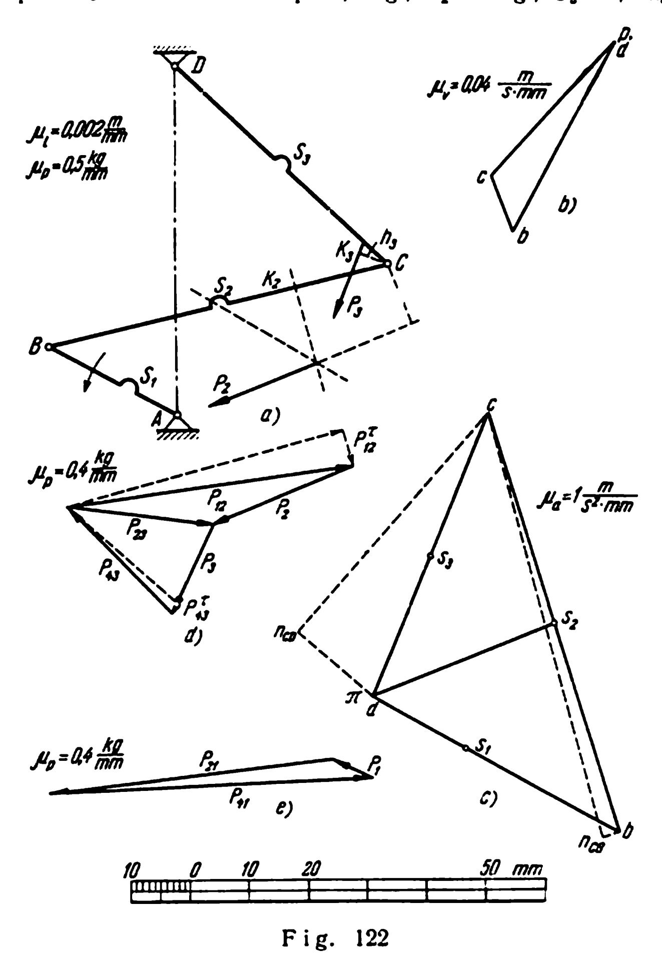


Fig. 122

5) Le nombre de tours de la manivelle AB en rotation en sens inverse des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante: $n=300$ tr/mn.

Les numéros des chaînons sont indiqués sur la fig. 122 *a*.

La pression dans les couples sera déterminée par la méthode des plans des forces. Pour construire les plans des forces, il faut préalablement déterminer les intensités, les lignes d'action et les sens sur les lignes d'action des forces d'inertie dans les chaînons. Pour déterminer les forces d'inertie, il faut construire le plan des accélérations et, pour être en possession des

données nécessaires de la construction de ces plans, il nous faut construire le plan des vitesses. Le calcul graphique doit donc débuter par la construction du plan des vitesses.

1. Plan des vitesses

La vitesse absolue du point B est :

$$v_B = l_{AB} \cdot w_1 = 0{,}05 \text{ m} \cdot \frac{\pi \cdot 300}{30} \text{ s}^{-1} = 1{,}57 \text{ m/s}.$$

Ayant choisi l'échelle $\mu_v = 0{,}04$ m/s·mm, déterminons la longueur du vecteur $\vec{pb}$ représentant la vitesse $\vec{v}_B$:

$$pb = v_B : \mu_v = 1{,}57 \text{ m/s} : 0{,}04 \text{ m/s.mm} = 39{,}25 \text{ mm}.$$

La vitesse du point C est déterminée à l'aide des deux équations vectorielles :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB};$$
$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD}.$$

Conformément à la première équation, menons du pôle p le vecteur $\vec{pb}$ perpendiculairement à AB de haut en bas et de droite à gauche (fig. 122 *b*) et sur l'extrémité de ce vecteur, la ligne d'action de $\vec{v}_{CB}$ perpendiculairement à BC.

Conformément à la seconde équation, plaçons l'extrémité du vecteur $\vec{pd}$ représentant la vitesse $\vec{v}_D$ au pôle, ce qui donne $v_D = 0$, puis on mène du pôle la ligne d'action du vecteur $\vec{v}_{CD}$ perpendiculairement à CD. On a l'extrémité du vecteur $\vec{pc}$ représentant la vitesse $\vec{v}_C$, au point d'intersection c des lignes d'action. Ainsi, le plan des vitesses est obtenu sous la forme du triangle pbc.

A l'aide du plan des vitesses on détermine les grandeurs des vitesses nécessaires pour construire le plan des accélérations:

$$v_{CB} = bc \cdot \mu_v = 10 \text{ mm} \cdot 0{,}04 \text{ m/s·mm} = 0{,}4 \text{ m/s},$$
$$v_{CD} = pc \cdot \mu_v = 33 \text{ mm} \cdot 0{,}04 \text{ m/s·mm} = 1{,}32 \text{ m/s}.$$

2. Plan des accélérations

Déterminons les grandeurs nécessaires pour construire le plan des accélérations :

$$a_B = a_B^n = v_B^2 : l_{AB} = (1{,}57 \text{ m/s})^2 : 0{,}05 \text{ m} = 49 \text{ m/s}^2;$$

$$a_{CB}^n = v_{CB}^2 : l_{BC} = (0{,}4 \text{ m/s})^2 : 0{,}12 \text{ m} = 1{,}3 \text{ m/s}^2;$$

$$a_{CD}^n = v_{CD}^2 : l_{CD} = (1{,}32 \text{ m/s})^2 : 0{,}1 \text{ m} = 17{,}4 \text{ m/s}^2.$$

Ayant choisi l'échelle $\mu_a = 1$ m/s²·mm, calculons les longueurs des vecteurs :

$$\pi b = a_B : \mu_a = 49 \text{ m/s}^2 : 1 \text{ m/s}^2\cdot\text{mm} = 49 \text{ mm};$$

$$bn_{CB} = a_{CB}^n : \mu_a = 1{,}3 \text{ m/s}^2 : 1 \text{ m/s}^2\cdot\text{mm} = 1{,}3 \text{ mm};$$

$$\pi n_{CD} = a_{CD}^n : \mu_a = 17{,}4 \text{ m/s}^2 : 1 \text{ m/s}^2\cdot\text{mm} = 17{,}4 \text{ mm}.$$

L'accélération du point C se détermine d'après les deux équations vectorielles:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB};$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}^{\,n}_{CD} + \vec{a}^{\,\tau}_{CD}.$$

Conformément à la première équation, menons (fig. 122*c*) le vecteur $\vec{\pi b}$ parallèlement à AB en l'orientant du pôle de haut en bas et de gauche à droite de manière que l'accélération du point B du mécanisme soit dirigée du point B vers le point A. Du point b on mène le vecteur $\vec{bn}_{CB}$ en l'orientant parallèlement à BC de haut en bas et de droite à gauche de manière que l'accélération $\vec{a}^{\,n}_{CB}$ soit orientée dans le mécanisme du point C au point B. Menons du point n_{CB} la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$.

Conformément à la seconde équation, plaçons au pôle l'extrémité du vecteur $\vec{\pi d}$ de manière que l'accélération a_D du point fixe D soit égale à 0. Menons du pôle le vecteur $\vec{\pi n}_{CD}$ parallèlement à CD en l'orientant de bas en haut et de droite à gauche de manière que l'accélération $\vec{a}^{\,n}_{CD}$ soit dirigée dans le mécanisme du point C au point D. Menons du point n_{CD} la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}^{\,\tau}_{CD}$ jusqu'à son intersection au point C avec la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$.

En réunissant le point c aux points π et b, on obtient le plan des accélérations sous la forme du triangle πbc.

Pour la détermination des accélérations des centres de gravité des chaînons, définissons d'abord la position des points s_1, s_2 et s_3 sur les vecteurs du plan des accélérations:

$$\pi s_1 = \pi b \cdot \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} = 49 \cdot \frac{20}{50} = 19{,}6 \text{ mm};$$

$$\pi s_2 = bc \cdot \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} = 76 \cdot \frac{60}{120} = 38 \text{ mm};$$

$$\pi s_3 = \pi c \cdot \frac{l_{DS_3}}{l_{DC}} = 53 \cdot \frac{50}{100} = 26{,}5 \text{ mm}.$$

Ayant mené le vecteur $\vec{\pi s}_2$ on trouve que sa longueur est égale à 34,5 mm. Les accélérations des centres de gravité sont:

$$a_{S_1} = \pi s_1 \cdot \mu_a = 19{,}6 \text{ mm} \cdot 1 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 19{,}6 \text{ m/s}^2;$$
$$a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a = 34{,}5 \text{ mm} \cdot 1 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 34{,}5 \text{ m/s}^2;$$
$$a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a = 26{,}5 \text{ mm} \cdot 1 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 26{,}5 \text{ m/s}^2.$$

3. Forces d'inertie

Les masses des chaînons sont:

$$m_1 = 1{,}5 \text{ kg} : 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}153 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m};$$
$$m_2 = 3 \text{ kg} : 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}306 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m};$$
$$m_3 = 2{,}5 \text{ kg} : 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}255 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}.$$

Les intensités des forces d'inertie sont :

$$P_1 = m_1 \cdot a_{S_1} = 0{,}153 \cdot 19{,}6 = 3 \text{ kg};$$
$$P_2 = m_2 \cdot a_{S_2} = 0{,}306 \cdot 34{,}5 = 10{,}6 \text{ kg};$$
$$P_3 = m_3 \cdot a_{S_3} = 0{,}255 \cdot 26{,}5 = 6{,}75 \text{ kg}.$$

L'accélération $\vec{a}_{S_1}$ du centre de gravité S_1 du chaînon AB en rotation avec la vitesse constante est dirigée suivant la droite AB vers le centre de rotation. Par conséquent, la force d'inertie $\vec{P}_1$ est dirigée sur la droite AB de bas en haut et de droite à gauche, c'est-à-dire en sens inverse de l'accélération $\vec{a}_{S_1}$. Le vecteur-force $\vec{P}_1$ n'est pas mené sur la fig. 122*a*.

Le chaînon BC accomplit un mouvement composé que nous réduirons en mouvement de translation avec le point accéléré B et en mouvement de rotation autour de ce même point. La force d'inertie $\vec{P}_2$ du chaînon BC s'obtient ainsi comme la somme géométrique de deux forces : la force d'inertie P_2' due au mouvement de translation et la force d'inertie P_2'' due au movement de rotation. Puisque dans le mouvement de translation du chaînon les accélérations de tous les points du chaînon sont égales et parallèles, alors $P_2' = m_2 \cdot a_B$, où a_B est l'accélération du centre de gravité S_2 dans le mouvement de translation avec le point B. On a pour la force $P_2'' = m_2 \cdot a_{S_2B}$, où a_{S_2B} est l'accélération du centre de gravité S_2 dans le mouvement de rotation. La ligne d'action de la force $\vec{P}_2$ passe par le centre de gravité S_2, et la ligne d'action de la force P_2'' par le centre de roulement K_2 distant du centre de rotation, c'est-à-dire du point B, de

$$l_{BK_2} = l_{BS_2} + \frac{J_2}{m_2 \cdot l_{BS_2}} = l_{BS_2} + \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0{,}306 \cdot 0{,}06} = 0{,}06 \text{ m} + 0{,}027 \text{ m} = 87 \text{mm}.$$

Ayant mené par le point S_2 la ligne d'action de la force $\vec{P}_2'$ parallèlement au vecteur $\vec{\pi b}$ du plan des accélérations et par le point K_2 la ligne d'action de la force $\vec{P}_2''$ parallèlement au vecteur $\vec{bs}_2$, on obtient au point d'intersection le point d'application de la résultante générale $\vec{P}_2$. L'intensité de P_2 a été déterminée plus haut, sa ligne d'action est parallèle au vecteur $\vec{\pi s}_2$, représentant l'accélération $\vec{a}_{S_2}$, le sens suivant la ligne d'action est inverse à celui de l'accélération $\vec{a}_{S_2}$.

Le chaînon CD est animé d'un mouvement de rotation avec une vitesse non uniforme. La force $\vec{P}_3$ est dirigée suivant la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_{S_3}$, parallèlement au vecteur $\vec{\pi s}_3$, en sens inverse à cette accélération. Le point d'application de la force P_3 est le centre de roulement K_2 distant du centre de rotation, c'est-à-dire du point D, de

$$l_{DK_3} = l_{DS_3} = \frac{J_3}{m_3 l_{DS_3}} = l_{DS_3} + \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0{,}255 \cdot 0{,}05} = 0{,}05 \text{ m} + 0{,}039 \text{ m} = 89 \text{ mm}$$

4. *Pressions dans les couples cinématiques*

Les forces extérieures agissant sur le groupe *BCD* doivent vérifier l'équation vectorielle

$$\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_{43}+\vec{P}_{12}=0.$$

Conformément à cette équation, le plan des forces ne peut pas être construit puisque les forces $\vec{P}_{43}$ et $\vec{P}_{12}$ sont connues seulement par leurs points d'application, leurs intensités et leurs directions étant inconnues. C'est pourquoi chacune de ces forces sera décomposée en composante tangentielle et en composante normale au chaînon, la composante normale étant dirigée suivant le chaînon. En outre, l'équation vectorielle prend la forme suivante:

$$\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}^{\tau}_{43}+\vec{P}^{n}_{43}+\vec{P}^{n}_{12}+\vec{P}^{\tau}_{12}=0.$$

La grandeur P^{τ}_{43} est déterminée à l'aide de l'équation des moments par rapport au point *C* des forces agissant sur le chaînon *CD*. Les moments des forces P_{23} et P^{n}_{43} sont nuls, puisque les lignes d'action de ces forces passent par le point *C*; donc l'équation des moments admet la forme:

$$P_3h_3=P^{\tau}_{43}\,l_{CD},$$

où h_3 est le bras de levier de la force P_3 donné sur le croquis (fig. 122 *a*). Puisque h_3 est égal à 10 mm, alors la force P^{τ}_{43} est égale à

$$P^{\tau}_{43}=P_3\cdot h_3:l_{CD}=6{,}75\ \text{kg}\cdot 10\ \text{mm}:100\ \text{mm}=0{,}675\ \text{kg}.$$

L'intensité de P^{τ}_{12} se détermine d'une manière analogue en partant de l'équation des moments par rapport au point *C* des forces agissant sur le chaînon *BC*:

$$P^{\tau}_{12}=C_2\cdot h_2:l_{BC}=10{,}6\ \text{kg}\cdot 24\ \text{mm}:120\ \text{mm}=2{,}12\ \text{kg}.$$

Après avoir choisi l'échelle $\mu_p=0{,}4$ kg/mm, déterminons la longueur des vecteurs-force:

$$\vec{P}_2=10{,}6\ \text{kg}:0{,}4\ \text{kg/mm}=26{,}5\ \text{mm};$$

$$\vec{P}_3=6{,}75\ \text{kg}:0{,}4\ \text{kg/mm}=16{,}9\ \text{mm};$$

$$\vec{P}^{\tau}_{43}=0{,}675\ \text{kg}:0{,}4\ \text{kg/mm}=1{,}69\ \text{mm};$$

$$\vec{P}^{\tau}_{12}=2{,}12\ \text{kg}:0{,}4\ \text{kg/mm}=5{,}3\ \text{mm}.$$

Construisons le plan des forces: menons les vecteurs-force $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$ (fig. 122 *d*), puis, sur l'extrémité du dernier vecteur, le vecteur $\vec{P}^{\tau}_{43}$, en le pointant perpendiculairement à *CD* vers le haut et à droite, puisque pour cette direction de la force $\vec{P}^{\tau}_{43}$ le moment créé s'oppose au moment de la force $\vec{P}_3$ par rapport au point *C*; de l'extrémité du vecteur $\vec{P}^{\tau}_{43}$ nous menons parallèlement à *CD* la ligne d'action de la force $\vec{P}^{n}_{43}$. Etant dans l'impossibilité de

construire sur le vecteur $\vec{P}^n_{43}$, dont la longueur est encore inconnue, le vecteur $\vec{P}^n_{12}$, nous construisons sur le vecteur $\vec{P}_2$ le dernier vecteur de l'équation, le vecteur $\vec{P}^\tau_{12}$, en l'orientant dans une direction perpendiculaire à BC de haut en bas et de gauche à droite, de manière que pour cette direction la force $\vec{P}^\tau_{12}$ engendre un moment s'opposant au moment par rapport au point C de la force $\vec{P}_2$. De l'origine du vecteur $\vec{P}^\tau_{12}$ menons la ligne d'action de $\vec{P}^n_{12}$ jusqu'à son intersection avec la ligne d'action $\vec{P}^n_{43}$. En réunissant le point d'intersection des lignes d'action de $\vec{P}^n_{43}$ et $\vec{P}^n_{12}$ à l'origine du vecteur $\vec{P}_2$ et à l'extrémité du vecteur $\vec{P}_3$, nous obtenons le plan des forces correspondant à l'équation vectorielle

$$\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_{43}+\vec{P}_{12}=0.$$

En mesurant la longueur des vecteurs $\vec{P}_{12}$ et $\vec{P}_{43}$ on trouve:

la pression dans le couple B: $P_{12}=50\text{ mm}\cdot 0{,}4\text{ kg/mm}=20\text{ kg}$;

la pression dans le couple D: $P_{43}=26\text{ mm}\cdot 0{,}4\text{ kg/mm}=10{,}4\text{ kg}$.

Pour la détermination de la pression dans le couple C, il faut construire le plan des forces relatif au chaînon BC ou CD. Le plan des forces relatif au chaînon CD doit être construit d'après l'équation vectorielle

$$\vec{P}_3+\vec{P}_{43}+\vec{P}_{23}=0.$$

Les deux premiers vecteurs sont déjà menés sur la fig. 122 *d*, il reste à mener le vecteur $\vec{P}_{23}$ qui doit fermer le triangle des forces. En menant ce vecteur et en mesurant sa longueur on trouve:

pression dans le couple C: $P_{23}=25\text{ mm}\cdot 0{,}4\text{ kg/mm}=10\text{ kg}$.

Le plan des forces pour la manivelle doit être construit d'après l'équation

$$\vec{P}_1+\vec{P}_{21}+\vec{P}_{41}=0.$$

En menant les vecteurs $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_{21}$ (la force $\vec{P}_{21}$ est égale à la force $\vec{P}_{12}$, mais est dirigée en sens inverse) et en réunissant l'origine du premier à l'extrémité du second, on en déduit le vecteur force $\vec{P}_{41}$. En mesurant la longueur de ce vecteur on trouve:

pression dans le couple A: $P_{41}=56\text{ mm}\cdot 0{,}4\text{ kg/mm}=22{,}4\text{ kg}$.

Exemple 2. Déterminer les pressions dans les couples cinématiques du mécanisme manivelle-bielle dont la position est celle de la fig. 123 *a* d'après les données suivantes:

1) les longueurs des chaînons: $l_{AB}=60\text{ mm}$, $l_{BC}=190\text{ mm}$;

2) les positions des centres de gravité S des chaînons: $l_{AS_1}=30\text{ mm}$, $l_{BS_2}=50\text{ mm}$; le centre de gravité du coulisseau est au point C;

3) le moment d'inertie de la bielle BC par rapport au centre de gravité: $J_2=5\cdot 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2$;

4) les poids G des chaînons: $G_1=1{,}57\text{ kg}$, $G_2=3{,}94\text{ kg}$, $G_3=4{,}9\text{ kg}$;

5) le nombre de tours de la manivelle AB en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre avec une vitesse constante est $n=382\text{ tr/mn}$.

Les numéros des chaînons sont indiqués sur la fig. 123 *a*.

1. Plan des vitesses

La vitesse absolue du point B est :

$$v_B = l_{AB} \cdot \omega_1 = 0{,}06\ \mathrm{m} \cdot \frac{\pi \cdot 382}{30}\ s^{-1} = 2{,}4\,\mathrm{m/s}.$$

Construisons le plan à l'échelle $\mu_v = 0{,}05$ m/s.mm.

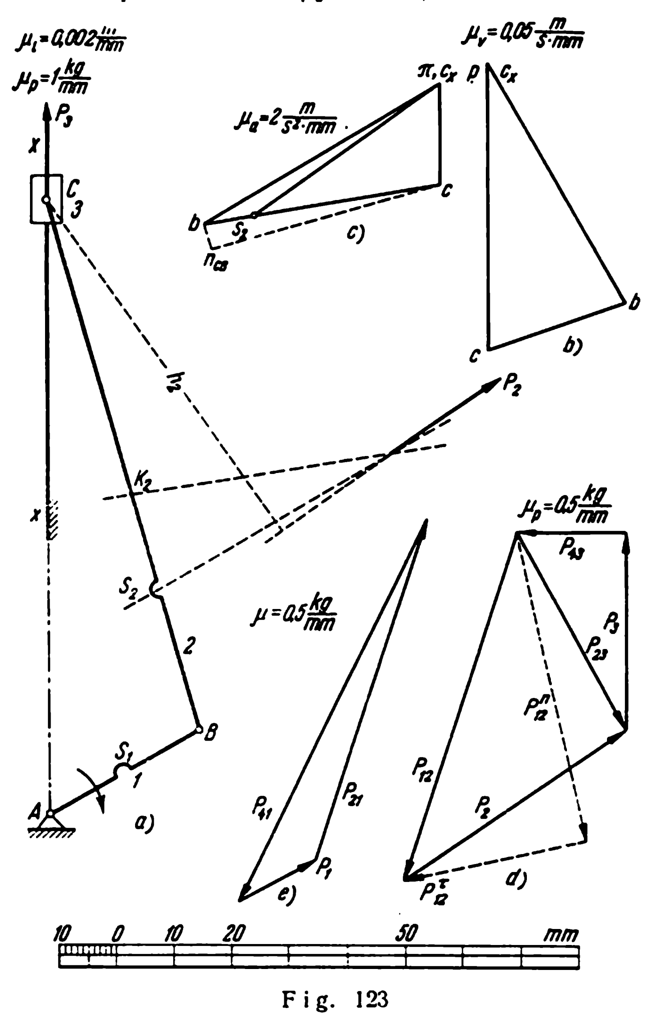


Fig. 123

La longueur du vecteur-vitesse $\vec{v}_B$ est

$$pb = \vec{v}_B : \mu_v = 2{,}4\ \mathrm{m/s} : 0{,}05\ \mathrm{m/s \cdot mm} = 48\ \mathrm{mm}.$$

La vitesse du point C se détermine d'après les deux équations vectorielles :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB};$$
$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C_x} + \vec{v}_{CC_x}.$$

Conformément à la première équation, menons du pôle p le vecteur $\vec{pb}$ perpendiculairement à AB de haut en bas et de gauche à droite (fig. 123 *b*) et de l'extrémité de ce vecteur la ligne d'action de $\vec{v}_{CB}$ perpendiculairement à BC.

Conformément à la seconde équation, plaçons au pôle l'extrémité du vecteur $\vec{pc}_x$ représentant la vitesse $\vec{v}_{C_x}$ du point fixe C_x appartenant à la glissière $x - x$ puisque $v_{C_x} = 0$, puis menons par le pôle parallèlement à la glissière la ligne d'action de la vitesse $\vec{v}_{CC_x}$. On obtient au point d'intersection de ces lignes d'action l'extrémité du vecteur pc représentant la vitesse du point C. Le plan des vitesses s'obtient sous la forme du triangle pbc.

En utilisant le plan construit, déterminons l'intensité de la vitesse v_{CB} nécessaire pour construire le plan des accélérations :

$$v_{CB} = bc \cdot \mu_v = 25 \text{ mm} \cdot 0{,}05 \text{ m/s} \cdot \text{mm} = 1{,}25 \text{ m/s}.$$

2. Plan des accélérations

Déterminons les grandeurs nécessaires pour construire le plan des accélérations :

$$a_B = a_B^n = v_B^2 : l_{AB} = (2{,}4 \text{ m/s})^2 : 0{,}06 \text{ m} = 96 \text{ m/s}^2;$$
$$a_{CB}^n = v_{CB}^2 : l_{BC} = (1{,}25 \text{ m/s})^2 : 0{,}19 \text{ m} = 8{,}2 \text{ m/s}^2.$$

Ayant choisi l'échelle du plan $\mu_a = 2$ m/s²·mm, calculons les longueurs des vecteurs :

$$\pi b = a_B : \mu_a = 96 \text{ m/s}^2 : 2 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 48 \text{ mm};$$
$$bn_{CB} = a_{CB}^n : \mu_a = 8{,}2 \text{ m/s}^2 : 2 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 4{,}1 \text{ mm}.$$

L'accélération du point C se détermine d'après les deux équations vectorielles :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau;$$
$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C_x} + \vec{a}_{CC_x}^n + \vec{a}_{CC_x}^\tau.$$

Conformément à la première équation, menons (fig. 123 *c*) le vecteur $\vec{\pi b}$ parallèlement à AB en l'orientant à partir du pôle de haut en bas et de droite à gauche, puis du point b le vecteur $\vec{bn}_{CB}$ parallèlement à BC de haut en bas et de gauche à droite. La grandeur de l'accélération $\vec{a}_{CB}^\tau$ est encore inconnue, donc menons du point n_{CB} la ligne d'action de cette accélération perpendiculairement à BC.

Conformément à la seconde équation plaçons au pôle l'extrémité du vecteur $\vec{\pi c}_x$ représentant l'accélération a_{C_x} égale à zéro du point fixe C_x. L'accélération normale $a_{CC_x}^n$ du point C en mouvement sur une trajectoire rectiligne est également nulle puisque le rayon de courbure de la trajectoire est infini. L'accélération $\vec{a}_{CC_x}^\tau$ est connue seulement par sa ligne d'action,

correspondant à la glissière. En menant par le pôle la ligne d'action de cette accélération parallèlement à la glissière jusqu'à l'intersection avec la ligne d'action de $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ on obtient le point c et le vecteur $\vec{\pi c}$ représentant l'accélération $\vec{a}_C$. Le plan des accélérations s'obtient sous la forme du triangle πbc.

Pour la détermination de l'accélération du centre de gravité des chaînons, il faut fixer au préalable sur le plan la position des points s_1 et s_2, extrémités des vecteurs représentant les accélérations absolues $\vec{a}_{S_1}$ et $\vec{a}_{S_2}$;

$$\pi s_1 = \pi b \cdot \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} = 48 \cdot \frac{30}{60} = 24 \text{ mm} ;$$
$$bs_2 = bc \cdot \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} = 41{,}5 \cdot \frac{50}{190} = 9 \text{ mm} ;$$
$$\pi s_2 = 39 \text{ mm} ; \quad \pi c = 17 \text{ mm}.$$

Les accélérations des centres de gravité sont :

$$a_{S_1} = \pi s_1 \cdot \mu_a = 24 \text{ mm} \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 48 \text{ m/s}^2 ;$$
$$a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a = 39 \text{ mm} \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 78 \text{ m/s}^2 ;$$
$$a_C = \pi c \cdot \mu_a = 17 \text{ mm} \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 34 \text{ m/s}^2.$$

3. Forces d'inertie

Les masses des chaînons sont :

$$m_1 = 1{,}57 \text{ kg} : 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}16 \text{ kg.s}^2/\text{m} ;$$
$$m_2 = 2{,}94 \text{ kg} : 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}3 \text{ kg.s}^2/\text{m} ;$$
$$m_3 = 4{,}9 \text{ kg} : 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}5 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}.$$

Les intensités des forces d'inertie sont :

$$P_1 = m_1 a_{S_1} = 0{,}16 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m} \cdot 48 \text{ m/s}^2 = 7{,}7 \text{ kg} ;$$
$$P_2 = m_2 a_{S_2} = 0{,}3 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m} \cdot 78 \text{ m/s}^2 = 23{,}4 \text{ kg} ;$$
$$P_3 = m_3 a_C = 0{,}5 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m} \cdot 34 \text{ m/s}^2 = 17 \text{ kg}.$$

La force d'inertie P_1 est dirigée suivant la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_{S_1}$ en sens inverse à cette accélération, c'est-à-dire sur la fig. 123 *a*, suivant le chaînon *AB* de bas en haut et de gauche à droite. Le vecteur représentant cette force n'est pas mené sur la fig. 123, *a*.

En réduisant le mouvement composé du chaînon *BC* en mouvement de translation avec le point accéléré *B* et en mouvement de rotation autour de ce point, on trouve la force totale d'inertie comme la somme géométrique de deux termes : la force d'inertie $\vec{P}'_2$ due au mouvement de translation et la force d'inertie $\vec{P}''_2$ due au mouvement de rotation. La ligne d'action de la force $\vec{P}'_2$ passe par le centre de gravité S_2 et est parallèle au vecteur $\vec{\pi b}$ du plan des accélérations car dans le mouvement de translation avec le point *B* l'accélération du centre de gravité est égale à l'accélération du point *B*. La force $\vec{P}''_2$ passe par le centre de roulement K_2 distant du centre de rotation, c'est-à-dire du point *B*, de

$$l_{BK_2} = l_{BS_2} + \frac{J_2}{m_2 \cdot l_{BS_2}} = l_{BS_2} + \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0{,}3 \cdot 0{,}05} = 0{,}05 \text{ m} + 0{,}033 \text{ m} = 83 \text{ mm}.$$

La ligne d'action de $\vec{P}_2''$ est parallèle au vecteur $\vec{bs}_2$ représentant l'accélération du centre de gravité S_2 en rotation autour du point B.

On obtient à l'intersection des lignes d'action des forces $\vec{P}_2'$ et $\vec{P}_2''$ le point par lequel passe la ligne d'action de la force d'inertie totale $\vec{P}_2$. La ligne d'action de cette force est parallèle au vecteur $\vec{\pi s}_2$ représentant l'accélération $\vec{a}_{S_2}$ du centre de gravité dans le mouvement composé du chaînon BC. L'intensité de la force P_2 a été déterminée plus haut.

La force $\vec{P}_3$ passe par le point C et est dirigée suivant la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_C$ en sens inverse à cette accélération.

4. Pressions dans les couples cinématiques

En décomposant la force $\vec{P}_{12}$ en composantes normale et tangentielle, nous construisons le plan des forces pour le groupe BCC_x d'après l'équation vectorielle

$$\vec{P}_2+\vec{P}_3+\vec{P}_{43}+\vec{P}^n_{12}+\vec{P}^\tau_{12}=0.$$

L'intensité de la force P^τ_{12} est déterminée d'après l'équation des moments par rapport au point C des forces agissant sur le chaînon BC. Les moments des forces $\vec{P}_{32}$ et $\vec{P}^n_{12}$ sont nuls parce que leurs lignes d'action passent par le point C. Le bras de levier de la force $\vec{P}^\tau_{12}$ est $l_{BC}=190$ mm ; le bras de levier h_2 de la force $\vec{P}_2$ déterminé d'après le croquis (fig. 123 *a*) est égal à 141. La force $\vec{P}^\tau_{12}$ est donc égale à

$$P^\tau_{12}=P_2\cdot h_2:l_{BC}=23{,}4 \text{ kg}\cdot 141 \text{ mm}:190 \text{ mm}=17{,}5 \text{ kg}.$$

Ayant choisi l'échelle $\mu_p=0{,}5$ kg/mm, calculons la longueur des vecteurs force :

$$\vec{P}_2=23{,}4 \text{ kg}:0{,}5 \text{ kg/mm}=46{,}8 \text{ mm} ;$$
$$\vec{P}_3=17 \text{ kg}=0{,}5 \text{ kg/mm}=34 \text{ mm};$$
$$\vec{P}^\tau_{12}=17{,}5 \text{ kg}:0{,}5 \text{ kg/mm}=35 \text{ mm}$$

Menons (fig. 123 *d*) les vecteurs force $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$ et sur l'extrémité du dernier vecteur la ligne d'action de la force $\vec{P}_{43}$ perpendiculairement à la glissière, puisque la glissière peut agir sur le coulisseau seulement suivant cette ligne d'action. En menant vers l'origine du vecteur $\vec{P}_2$ le vecteur force $\vec{P}^\tau_{12}$ perpendiculairement à BC, de haut en bas, et de droite à gauche, puisque pour cette direction le moment de la force P_2 s'équilibre avec le moment de la force $\vec{P}^\tau_{12}$, menons de l'origine du vecteur $\vec{P}^\tau_{12}$ la ligne d'action de la force $\vec{P}^n_{12}$ jusqu'à l'intersection avec la ligne d'action de la force $\vec{P}_{43}$. En réunissant le point d'intersection des lignes d'action avec l'origine du vecteur force $\vec{P}_2$, on obtient les vecteurs force $\vec{P}_{12}$ et $\vec{P}_{43}$.

En mesurant les longueurs de vecteurs on trouve : la pression dans le couple B : $P_{12}=64$ mm·0,5 kg/mm $=32$ kg ; la pression dans le couple de translation $P_{43}=19$ mm·0,5 kg/mm $=9,5$ kg.

La pression dans le couple C peut être déterminée d'après le plan des forces construit à l'aide de l'équation vectorielle relative au coulisseau,

$$\vec{P}_3+\vec{P}_{43}+\vec{P}_{23}=0.$$

Les deux premiers vecteurs sont déjà menés sur la fig. 123 *d*. En fermant le triangle des forces avec le vecteur $\vec{P}_{23}$ et en mesurant la longueur de ce vecteur, on trouve : la pression dans le couple C : $P_{23}=39$ mm·0,5 kg/mm $=19,5$ kg.

La pression dans le couple A peut être déterminée à l'aide du plan des forces relatif à la manivelle AB construit d'après l'équation vectorielle

$$\vec{P}_1+\vec{P}_{21}+\vec{P}_{41}=0.$$

L'intensité et la direction de la force $\vec{P}_1$ sont définies plus haut. La force $\vec{P}_{21}$ est égale à la force $\vec{P}_{12}$ et de sens contraire. En menant les vecteurs représentant ces forces (fig. 123 *e*) et en fermant le triangle avec le vecteur $\vec{P}_{41}$, on trouve la pression dans le couple A : $P_{41}=76$ mm·0,5 kg/mm $=38$ kg.

Exemple 3. Déterminer les pressions dans les couples cinématiques, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du chaînon EF d'un mécanisme à six chaînons, se trouvant dans la position indiquée sur la fig. 124 *a*, d'après les données suivantes :

1) les longueurs des chaînons sont : $l_{AB}=50$ mm, $l_{BC}=180$ mm, $l_{BD}=120$ mm, $l_{DE}=180$ mm, $l_{EF}=100$ mm, $l_{AF}=250$ mm;

2) les positions des centres de gravité S des chaînons sont : $l_{AS_1}=25$ mm, $l_{BS_2}=90$ mm, $l_{DS_4}=90$ mm, $l_{FS_5}=40$ mm; le centre de gravité du coulisseau est au point C ;

3) les poids G des chaînons sont: $G_1=1,96$ kg, $G_2=5,88$ kg, $G_3=9,8$ kg, $G_4=3,92$ kg, $G_5=2,94$ kg (les numéros des chaînons sont indiqués sur la fig. 124, *a*) ;

4) les moments d'inertie J des chaînons par rapport à leurs centres de gravité sont : $J_2=6\cdot10^{-4}$ kg.m.s², $J_4=5\cdot10^{-4}$ kg.m.s², $J_5=3\cdot10^{-4}$ kg.m.s² ;

5) le nombre de tours de la manivelle AB en rotation avec une vitesse constante dans le sens des aiguilles d'une montre est $n=300$ tr/mn.

1. Plan des vitesses

$$v_B=l_{AB}\cdot\omega_1=0,05\ \text{m}\cdot\frac{\pi\cdot300}{30}\ \text{s}^{-1}=1,57\ \text{m/s}.$$

La longueur du vecteur $\vec{v}_B$ est:

$$pb=v_B:\mu_v=1,57\ \text{m/s}:0,04\ \text{m/s}\cdot\text{mm}=39,2\ \text{mm},$$

où l'échelle du plan des vitesses est $\mu_v=0,04$ m/s.mm.

Construisons le plan des vitesses (fig. 124 *b*) :

1) menons le vecteur $\vec{pb}$ perpendiculaire à AB en l'orientant de bas en haut et de gauche à droite suivant la direction de la vitesse du point B ;

2) pour déterminer la vitesse $\vec{v}_C$, nous disposons des deux équations vectorielles

$$\vec{v}_C=\vec{v}_B+\vec{v}_{CB};$$
$$\vec{v}_C=\vec{v}_{C_x}+\vec{v}_{CC_x},$$

où C_x est un point de la glissière $x - x$ fixe, situé au-dessous du point C en menant du point b perpendiculairement à BC la ligne d'action de $\vec{v}_{CB}$ et en menant du pôle parallèlement à la glissière $x - x$ la ligne d'action de $\vec{v}_{CC_x}$ (parce que $v_{C_x}=0$ et que le point c_x coïncide, par conséquent, avec le pôle),

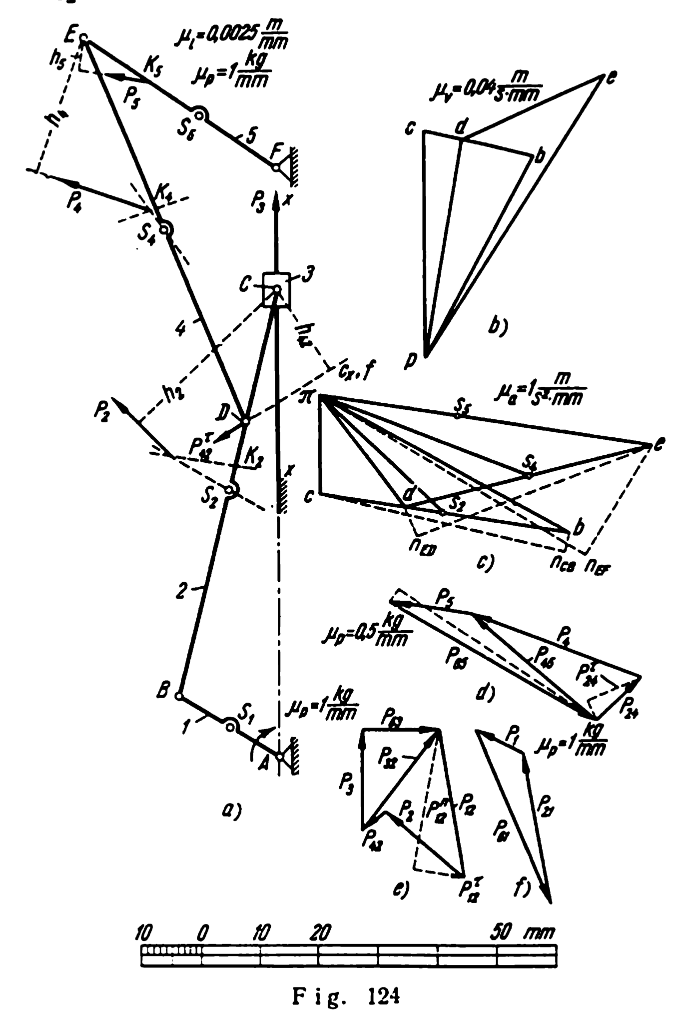


Fig. 124

on obtient au point d'intersection de ces lignes d'action le point c, extrémité du vecteur $\vec{pc}$ représentant la vitesse $\vec{v}_C$;

3) en divisant le segment bc par le point d dans le rapport $bd:bc = l_{BD}:l_{BC}$ nous menons $\vec{pd}$ qui représente le vecteur $\vec{v}_D$;

4) pour déterminer $\vec{v}_E$ nous disposons des deux équations vectorielles:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_{ED};$$
$$\vec{v}_E = \vec{v}_F + \vec{v}_{EF},$$

menant du point d la ligne d'action de $\vec{v}_{ED}$ perpendiculairement à DE et du pôle (puisque $v_F = 0$ et que le point f coïncide, par conséquent, avec le pôle) la ligne d'action de $\vec{v}_{EF}$ perpendiculairement à EF, on obtient au point d'intersection des lignes d'action le point e, l'extrémité du vecteur $\vec{de}$ représentant la vitesse $\vec{v}_{ED}$ et l'extrémité du vecteur $\vec{pe}$ représentant le vecteur $\vec{v}_E$s.

A l'aide du plan construit, déterminons les vitesses nécessaires pour construire le plan des accélérations:

$$v_{CB} = bc \cdot \mu_v = 19{,}5 \text{ mm} \cdot 0{,}04 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 0{,}78 \text{ m/s};$$
$$v_{ED} = de \cdot \mu_v = 28 \text{ mm} \cdot 0{,}04 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 1{,}12 \text{ m/s};$$
$$v_{EF} = pe \cdot \mu_v = 58 \text{ mm} \cdot 0{,}04 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 2{,}32 \text{ m/s}.$$

La vitesse angulaire du chaînon EF (chaînon n° 5) est

$$\omega_5 = v_E : l_{EF} = 2{,}32 \text{ m/s} : 0{,}1 \text{ m} = 23{,}2 \text{ s}^{-1}.$$

Le sens de ω_5 est celui des aiguilles d'une montre, ce qui est évident dès qu'on déplace le vecteur $\vec{pe}$ parallèlement à lui-même jusqu'à coïncidence du point p avec le point sur la fig. 124 *a*.

2. Plan des accélérations

$$a_B = a_B^n = v_B^2 : l_{AB} = (1{,}57 \text{ m/s})^2 : 0{,}05 \text{ m} = 49{,}3 \text{ m/s}^2.$$

Après avoir choisi l'échelle $\mu_a = 1$ m/s²·mm, la longueur du vecteur $\vec{a}_E$ est

$$\pi b = a_B : \mu_a = 49{,}3 \text{ m/s}^2 : 1 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 49{,}3 \text{ mm}.$$

Menons (fig. 124 *c*) du pôle π le vecteur $\vec{\pi b}$ en l'orientant parallèlement à AB de haut en bas, puisque l'accélération $\vec{a}_B$ est dirigée dans le mécanisme du point B vers le point A (fig. 124 *a*).

La détermination de l'accélération $\vec{a}_C$ se fait d'après les deux équations vectorielles

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau;$$
$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C_x} + \vec{a}_{CC_x}^n + \vec{a}_{CC_x}^\tau.$$

L'intensité de l'accélération est: $a_{CB}^n = v_{CB}^2 : l_{BC} = (0{,}78 \text{ m/s})^2 : 0{,}18 \text{ m} = 3{,}36 \text{ m/s}^2$; la longueur de cette accélération est: $bn_{CB} = a_{CB}^n : \mu_a = 3{,}36 \text{ m/s}^2 : 1 \text{ m/s}^2 \cdot \text{mm} = 3{,}36 \text{ mm}$.

Du point b menons le vecteur $\vec{bn}_{CB}$ en le dirigeant parallèlement à BC de haut en bas, puisque l'accélération $\vec{a}_{CB}^n$ est dirigée dans le mécanisme suivant la droite BC du point C vers le point B. Menons du point n_{CB} la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_{CB}^\tau$ perpendiculairement à BC.

En passant à la seconde équation, plaçons le point c_x au pôle vu que l'accélération $a_{C_x}=0$ (le point C_x est fixe). L'accélération $a^n_{CC_x}$ est aussi nulle puisque le point C se déplace suivant une trajectoire rectiligne dont le rayon de courbure est infini. Menons donc la ligne d'action de $\vec{a}^\tau_{CC_x}$ par le pôle parallèlement à la glissière $x—x$. Au point d'intersection des lignes d'action se trouve l'extrémité du vecteur $\vec{\pi c}$ représentant l'accélération $\vec{a}_C$.

En réunissant les points b et c et en divisant le segment bc par le point d dans le rapport $bd:bc=l_{BD}:l_{BC}$ et en joignant le point d au pôle, on obtient le vecteur $\vec{\pi d}$ représentant l'accélération $\vec{a}_D$.

L'accélération $\vec{a}_E$ est déterminée d'après les deux équations vectorielles

$$\vec{a}_E=\vec{a}_D+\vec{a}^n_{ED}+\vec{a}^\tau_{ED};$$
$$\vec{a}_E=\vec{a}_F+\vec{a}^n_{EF}+\vec{a}^\tau_{EF}.$$

Déterminons les grandeurs des composantes normales des accélérations relatives:

$$a^n_{ED}=v^2_{ED}:l_{ED}=(1{,}12\ \text{m/s})^2:0{,}18\ \text{m}=6{,}97\approx 7\ \text{m/s}^2;$$
$$a^n_{EF}=v^2_{EF}:l_{EF}=(2{,}32\ \text{m/s})^2:0{,}1\ \text{m}\approx 53{,}8\ \text{m/s}^2.$$

Déterminons les longueurs des vecteurs-accélération $\vec{a}^n_{ED}$ et $\vec{a}^n_{EF}$

$$dn_{ED}=a^n_{ED}:\mu_a=7\ \text{m/s}^2:1\ \text{m/s}^2\cdot\text{mm}=7\ \text{mm};$$
$$\pi n_{EF}=a^n_{EF}:\mu_a=53{,}8\ \text{m/s}^2:1\ \text{m/s}^2\cdot\text{mm}=53{,}8\ \text{mm}.$$

Conformément à la première équation menons du point d, extrémité du vecteur $\vec{\pi d}$, déjà construit, le vecteur $\vec{dn}_{ED}$ en l'orientant parallèlement à ED de haut en bas, puisque l'accélération $\vec{a}^n_{ED}$ est dirigée dans le mécanisme du point E au point D et de l'extrémité n_{ED} de ce vecteur la ligne d'action d'accélération $\vec{a}^\tau_{ED}$ perpendiculairement à DE.

Conformément à la seconde équation, plaçons le point f, extrémité du vecteur-accélération a_F égal à zéro, au pôle; menons du pôle le vecteur $\vec{\pi n}_{EF}$ et du point n_{EF}, extrémité de ce vecteur, la ligne d'action de $\vec{a}^\tau_{EF}$ jusqu'à son intersection au point e avec la ligne d'action de $\vec{a}^\tau_{ED}$.

En réunissant le point e aux points d et π on trouve le vecteur $\vec{de}$ représentant l'accélération $\vec{a}_{ED}$ et le vecteur $\vec{\pi e}$ représentant l'accélération $\vec{a}_{EF}=\vec{a}_E$.

A l'aide du plan des accélérations qu'on vient de construire, déterminons les accélérations des centres de gravité des chaînons nécessaires pour définir les forces d'inertie :

1) en divisant le vecteur $\vec{\pi b}$ par le point s_1 dans le rapport $\pi s_1:\pi b=l_{AS_1}:l_{AB}$, nous trouvons la longueur du vecteur $\pi s_1=24{,}65$ mm et l'accélération $a_{S_1}=\pi s_1\cdot\mu_a=24{,}65\ \text{mm}\cdot 1\ \text{m/s}^2\cdot\text{mm}=24{,}65\ \text{m/s}^2$;

2) en divisant le vecteur $\vec{bc}$ par le point s_2 dans le rapport $bs_2:bc = l_{BS_2}:l_{BC}$ et en réunissant le point s_2 au pôle, nous trouvons la longueur du vecteur $\pi s_2 = 30$ mm et l'accélération $a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a = 30$ mm$\cdot$1 m/s$^2\cdot$mm $= 30$ m/s^2;

3) la longueur du vecteur $\vec{\pi c} = 17,5$ mm; donc l'accélération $a_C = \pi c \cdot \mu_a = 17,5$ mm$\cdot$1 m/s$^2\cdot$mm $= 17,5$ m/s^2;

4) en divisant le vecteur $\vec{de}$ par le point s_4 dans le rapport $ds_4:de = l_{DS_4}:l_{DE}$ et en réunissant le point s_4 au pôle, nous trouvons la longueur du vecteur $\vec{\pi s_4} = 39$ mm et l'accélération $a_{S_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a = 39$ mm$\cdot$1 m/s$^2\cdot$mm $= 39$ m/s^2;

5) en divisant le vecteur $\vec{\pi e}$ par le point s_5 dans le rapport $\pi s_5:\pi e = l_{FS_5}:l_{FE}$ nous trouvons la longueur du vecteur $\pi s_5 = 23,6$ mm et l'accélération $a_{S_5} = \pi s_5 \cdot \mu_a = 23,6$ mm$\cdot$1 m/s$^2\cdot$mm $= 23,6$ m/s^2.

Nous trouvons l'accélération angulaire ε_5 du chaînon (chaînon n° 5) en divisant l'accélération tangentielle $\vec{a}_E^{\tau}$ du point E par le rayon de rotation de ce point, c'est-à-dire par la longueur $l_{FE} = 0,1$ m.

La longueur du vecteur $\vec{n_{EF}e} = 25$ mm, l'accélération est $a_E^{\tau} = n_{EF}e \cdot \mu_a = 25$ mm$\cdot$1 m/s$^2\cdot$mm $= 25$ m/s^2. Par conséquent,

$$\varepsilon_5 = 25 \text{ m/s}^2 : 0,1 \text{ m} = 250 \text{ s}^{-2}.$$

La direction de l'accélération ε_5 est celle des aiguilles d'une montre, ce qui devient évident après avoir déplacé le vecteur $\vec{\pi n_{EF}}$ parallèlement à lui-même jusqu'à ce que le point π coïncide avec le point E sur la fig. 127 *a*.

3. *Forces d'inertie*

Les masses des chaînons sont:

$$m_1 = 1,96 \text{ kg}:9,8 \text{ m/s}^2 = 0,2 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m};$$
$$m_2 = 5,88 \text{ kg}:9,8 \text{ m/s}^2 = 0,6 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m};$$
$$m_3 = 9,8 \text{ kg}:9,8 \text{ m/s}^2 = 1,0 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m};$$
$$m_4 = 3,92 \text{ kg}:9,8 \text{ m/s}^2 = 0,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m};$$
$$m_5 = 2,94 \text{ kg}:9,8 \text{ m/s}^2 = 0,3 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}.$$

Les intensités des forces d'inertie sont:

$$P_1 = m_1 \cdot a_{S_1} = 0.2 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}\cdot 24,65 \text{ m/s}^2 = 4,93 \text{ kg};$$
$$P_2 = m_2 \cdot a_{S_2} = 0,6 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}\cdot 30 \text{ m/s}^2 = 18 \text{ kg};$$
$$P_3 = m_3 \cdot a_{S_3} = 1,0 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}\cdot 17,5 \text{ m/s}^2 = 17,5 \text{ kg};$$
$$P_4 = m_4 \cdot a_{S_4} = 0,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}\cdot 39 \text{ m/s}^2 = 15,6 \text{ kg};$$
$$P_5 = m_5 \cdot a_{S_5} = 0,3 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}\cdot 23,6 \text{ m/s}^2 = 7 \text{ kg}.$$

Les lignes d'action des forces d'inertie et leurs sens sur ces lignes d'action sont les suivants.

La ligne d'action de la force P_1 coïncide avec la ligne d'action de l'accélération $\vec{a}_B^n$, c'est-à-dire avec la droite AB. Le sens de la force $\vec{P}_1$ est le sens inverse de l'accélération $\vec{a}_{S_1}$, c'est-à-dire de bas en haut et de droite à gauche. Le vecteur $\vec{P}_1$ n'est pas mené sur la fig. 124 *a*.

On peut considérer le mouvement composé du chaînon BC comme le résultat d'un mouvement de translation avec le point accéléré B et d'un mouvement de rotation autour du point B. La ligne d'action de la force $\vec{P}_2'$ due au mouvement de translation passe par le centre de gravité S_2 paral-

lèlement au vecteur $\vec{\pi b}$ représentant l'accélération $\vec{a}_B$ du centre de gravité S_2 dans le mouvement de translation. La ligne d'action de la force $\vec{P}_2''$ dans le mouvement de rotation autour du point B est menée parallèlement au vecteur $\vec{bs}_2$ représentant l'accélération $\vec{a}_{S_2B}$ dans ce mouvement et passant par le centre de roulement K_2 distant du point B de

$$l_{BK_2}=l_{BS_2}+\frac{J_2}{m_2\cdot l_{BS_2}}=l_{BS_2}+\frac{6\cdot10^{-4}}{0,6\cdot0,09}=0,09\ \text{m}+0,011\ \text{m}=101\ \text{mm}.$$

On mène par le point d'intersection des lignes d'action des forces $\vec{P}_2'$ et P_2'' la ligne d'action de la force $\vec{P}_2$ parallèlement au vecteur $\vec{\pi s}_2$ représentant l'accélération absolue $\vec{a}_{S_2}$ du centre de gravité S_2 du chaînon BS. Le sens de la force $\vec{P}_2$ sur la ligne d'action est le sens inverse de l'accélération $\vec{a}_{S_2}$.

La force $\vec{P}_3$ est dirigée suivant la glissière $x - x$ en sens inverse au vecteur $\vec{\pi c}$ représentant l'accélération $\vec{a}_C$.

On peut considérer le mouvement composé du chaînon DE comme le résultat d'un mouvement de translation avec le point accéléré D et d'un mouvement de rotation autour du point D. Conformément à ceci, menons par le centre de gravité S_4 la ligne d'action de la force $\vec{P}_4'$ relative au mouvement de translation et par le centre de roulement K_4 distant du point D de

$$l_{DK_4}=l_{DS_4}+\frac{J_4}{m_4\cdot l_{DS_4}}=l_{DS_4}+\frac{5\cdot10^{-4}}{0,4\cdot0,09}=0,09\ \text{m}+0,014\ \text{m}=104\ \text{mm},$$

la ligne d'action de la force $\vec{P}_4''$, engendrée par le mouvement de rotation, parallèlement au vecteur $\vec{ds}_4$ représentant l'accélération $\vec{a}_{S_4D}$ du centre de gravité S_4 par rapport à ce mouvement.

Menons du point d'intersection des lignes d'action des forces $\vec{P}_4'$ et $\vec{P}_4''$ le vecteur-force $\vec{P}_4$ dirigé parallèlement et de sens inverse au vecteur $\vec{\pi s}_4$ représentant l'accélération $\vec{a}_{S_4}$.

Le chaînon EF est animé d'un mouvement de rotation avec une vitesse non uniforme. Le point d'application de la force $\vec{P}_5$ est le centre de roulement K_5 distant du point F de

$$l_{FK_5}=l_{FS_5}+\frac{J_5}{m_5\cdot l_{FS_5}}=l_{FS_5}+\frac{3\cdot10^{-4}}{0,3\cdot0,04}=0,04\ \text{m}+0,025\ \text{m}=65\ \text{mm}.$$

Menons du centre de roulement K_5 le vecteur-force $\vec{P}_5$ en le dirigeant parallèlement au vecteur $\vec{\pi s}_5$ représentant l'accélération $\vec{a}_{S_5}$ et en sens inverse à cette accélération.

4. *Pressions dans les couples cinématiques*

Les pressions doivent être d'abord déterminées dans les couples du dernier groupe additif, c'est-à-dire le groupe FED.

Les chaînons de ce groupe, dans la position représentée sur la fig. 124 *a*, se trouvent sous l'action des forces $\vec{P}_4$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_{65}$ et $\vec{P}_{24}$. En décomposant

les forces $\vec{P}_{65}$ et $\vec{P}_{24}$ en composantes normales et tangentielles, on construit le plan des forces d'après l'équation vectorielle

$$\vec{P}_4+\vec{P}_5+\vec{P}^{\tau}_{65}+\vec{P}^{n}_{65}+\vec{P}^{n}_{24}+\vec{P}^{\tau}_{24}=0.$$

Le chaînon EF se trouve sous l'action des forces $\vec{P}_5$, $\vec{P}_{45}$, $\vec{P}^{n}_{65}$ et $\vec{P}^{\tau}_{65}$. Les moments des forces $\vec{P}_{45}$ et $\vec{P}^{n}_{65}$ par rapport au point E sont nuls (les lignes d'action de ces forces passent par le point E). Le moment de la force P_5 est $P_5 \cdot h_5$, où h_5 est le bras de levier de la force P_5 défini d'après le croquis et est égal à 15 mm (fig. 124 *a*). On déduit de l'équation des moments

$$P^{\tau}_{65} \cdot l_{EF}=P_5 \cdot h_5$$

que $P^{\tau}_{65}=P_5 \cdot h_5 : l_{EF}=7$ kg·15 mm:100 mm $\approx$ 1 kg.

Le chaînon DE se trouve sous l'action des forces $\vec{P}_4$, $\vec{P}_{54}$, $\vec{P}^{n}_{24}$ et $\vec{P}^{\tau}_{24}$. Les moments des forces $\vec{P}_{54}$ et $\vec{P}^{n}_{24}$ par rapport au point E sont nuls (leurs lignes d'action passent par le point E). Le moment de la force P_4 est $P_4 \cdot h_4$, où h_4 est le bras de levier de cette force défini par le croquis et est égal à 57 mm. On déduit de l'équation des moments

$$P^{\tau}_{24} \cdot l_{DE}=P_4 \cdot h_4$$

que $P^{\tau}_{24}=P_4 \cdot h_4 : l_{DE}=15{,}6$ kg·57 mm:180 mm $\approx$ 5 kg.

Ayant choisi l'échelle $\mu_P=0{,}5$ kg/mm définissons la longueur des vecteurs-force :

$$\vec{P}_4=15{,}6 \text{ kg}:0{,}5 \text{ kg/mm}=31{,}2 \text{ mm} ;$$

$$\vec{P}_5=7 \text{ kg}:0{,}5 \text{ kg/mm}=14 \text{ mm} ;$$

$$\vec{P}^{\tau}_{65}=1 \text{ kg}:0{,}5 \text{ kg/mm}=2 \text{ mm} ;$$

$$\vec{P}^{\tau}_{24}=5 \text{ kg}:0{,}5 \text{ kg/mm}=10 \text{ mm}.$$

Menons successivement (fig. 124 *d*) les vecteurs-force $\vec{P}_4$ et $\vec{P}_5$, puis le vecteur $\vec{P}^{\tau}_{65}$ perpendiculairement à FE de bas en haut et de gauche à droite et de l'extrémité de ce dernier vecteur menons parallèlement à FE la ligne d'action de la force $\vec{P}^{n}_{65}$. Construisons sur l'origine du vecteur $\vec{P}_4$ le vecteur-force $\vec{P}^{\tau}_{24}$ et menons par son origine la ligne d'action de la force $\vec{P}^{n}_{24}$ jusqu'à l'intersection avec la ligne d'action de la force $\vec{P}^{n}_{65}$. En réunissant le point d'intersection de ces lignes d'action avec l'extrémité du vecteur $\vec{P}_5$ et l'origine du vecteur $\vec{P}_4$, nous obtenons le plan des forces correspondant à l'équation vectorielle

$$\vec{P}_4+\vec{P}_5+\vec{P}_{65}+\vec{P}_{24}=0.$$

En mesurant la longueur des vecteurs, on a : pression dans le couple F: $P_{65}=41$ mm·0,5 kg/mm $=20{,}5$kg ; pression dans le couple D: $P_{24}=10$ mm·0,5 kg/mm $=5$ kg.

On peut déterminer la pression dans le couple E d'après le plan des forces construit pour le chaînon DE ou le chaînon FE. Le chaînon FE se trouve sous l'action des forces P_5, P_{65} et P_{45}. Les vecteurs de ces deux premières forces sont déjà menés sur la fig. 124 d: en réunissant l'extrémité du vecteur $\vec{P}_{65}$ à l'origine du vecteur $\vec{P}_5$, nous en déduisons le vecteur force $\vec{P}_{45}$. En mesurant la longueur de ce vecteur, on trouve: la pression dans le couple E: $P_{45}=28$ mm·0,5 kg/mm = 14 kg.

Le groupe BCC_x se trouve sous l'action des forces $\vec{P}_2$, $\vec{P}_{42}$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_{63}$ et $\vec{P}_{12}$. En décomposant la dernière force suivant ses composantes normale et tangentielle, nous pouvons construire le plan des forces à l'aide de l'équation vectorielle

$$\vec{P}_2+\vec{P}_{42}+\vec{P}_3+\vec{P}_{63}+\vec{P}^n_{12}+\vec{P}^\tau_{12}=0.$$

Le chaînon BC se trouve sous l'action des forces $\vec{P}_2$, $\vec{P}_{42}$, $\vec{P}_{32}$, $\vec{P}^n_{12}$ et $\vec{P}^\tau_{12}$. Puisque les moments des forces $\vec{P}_{32}$ et $\vec{P}^n_{12}$ par rapport au point C sont nuls (la ligne d'action de ces forces passe par le point C), alors l'équation des moments par rapport au point C est de la forme

$$P^\tau_{12}\cdot l_{BC}=P_2h_2+P_{42}h_{42},$$

où $h_2=85$ mm est le bras de levier de la force P_2 donné sur le croquis et $h_{42}=42{,}5$ mm, le bras de levier de la force P_{42} (fig. 124 a). On obtient de cette équation

$$P^\tau_{12}=\frac{P_2h_2+P_{42}h_{42}}{l_{BC}}=\frac{18\text{ kg}\cdot 85\text{ mm}+5\text{ kg}\cdot 42{,}5\text{ mm}}{180\text{ mm}}=9{,}7\text{ kg}.$$

Ayant choisi l'échelle $\mu_P=1$ kg/mm, nous déterminons la longueur des vecteurs-force:

$$\vec{P}_2=18\text{ kg}:1\text{ kg/mm}=18\text{ mm};$$
$$\vec{P}_{42}=5\text{ kg}:1\text{ kg/mm}=5\text{ mm};$$
$$\vec{P}_3=17{,}5\text{ kg}:1\text{ kg/mm}=17{,}5\text{ mm};$$
$$\vec{P}^\tau_{12}=9{,}7\text{ kg}:1\text{ kg/mm}=9{,}7\text{ mm}.$$

Menons successivement (fig. 127 e) les vecteurs $\vec{P}_2$, $\vec{P}_{42}$, $\vec{P}_3$ et, de l'extrémité du dernier vecteur, la ligne d'action de la force $\vec{P}_{63}$. En construisant sur l'origine du vecteur $\vec{P}_2$ le vecteur $\vec{P}^\tau_{12}$ dirigé perpendiculairement à BC et de gauche à droite, menons par son origine la ligne d'action de la force $\vec{P}^n_{12}$ jusqu'à l'intersection avec la ligne d'action de la force $\vec{P}_{63}$. En réunissant le point d'intersection de ces lignes d'action avec l'origine du vecteur $\vec{P}_2$, on en déduit le plan des forces correspondant à l'équation vectorielle

$$\vec{P}_2+\vec{P}_{42}+\vec{P}_3+\vec{P}_{63}+\vec{P}_{12}=0.$$

En mesurant la longueur des vecteurs P_{12} et P_{63} on trouve:
pression dans le couple B: $P_{12}=27$ mm·1 kg/mm = 27 kg;
pression dans le couple de translation: $P_{63}=13$ mm·1 kg/mm = 13 kg.

La pression dans le couple C est déterminée à l'aide du plan des forces pour le chaînon BC construit d'après l'équation vectorielle

$$\vec{P}_{12}+\vec{P}_{2}+\vec{P}_{42}+\vec{P}_{32}=0.$$

Sur la fig 124 *e* les trois premiers vecteurs sont déjà menés. En réunissant l'extrémité du vecteur $\vec{P}_{42}$ à l'origine du vecteur $\vec{P}_{12}$ on trouve le vecteur-force $\vec{P}_{32}$. Mesurant la longueur de ce vecteur, on trouve:

pression dans le couple C: $P_{32}=22$ mm·1 kg/mm $=22$ kg.

La pression dans le couple A se détermine à l'aide du plan de force de la manivelle construit d'après l'équation vectorielle

$$\vec{P}_{21}+\vec{P}_{1}+\vec{P}_{61}=0.$$

L'intensité et la direction de la force $\vec{P}_{1}$ ont été définies plus haut. La force $\vec{P}_{21}$ est égale en intensité à la force P_{12} et est dirigée en sens inverse. En menant les vecteurs représentant ces forces à l'échelle $\mu_P=1$ kg/mm (fig. 124 *f*) et en mesurant la longueur du vecteur $\vec{P}_{61}$ qui ferme le triangle des forces on trouve:

pression dans le couple A: $P_{61}=34$ mm·1 kg/mm $=34$ kg.

CHAPITRE VII

FROTTEMENT DANS LES COUPLES CINÉMATIQUES

30. LES DIFFÉRENTS ASPECTS DU FROTTEMENT

On observe toujours le phénomène de frottement quand des corps quelconques, solides, liquides ou gazeux, en contact sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, ou bien quand ils sont soumis à l'action de forces susceptibles de provoquer leur mouvement relatif. Dans ce qui suit, nous aurons en vue uniquement le frottement des surfaces des corps solides en contact.

L'expérience montre que pendant le mouvement relatif de deux corps solides en contact, adhérant l'un à l'autre par une certaine force, une force s'opposant au mouvement relatif agit sur les surfaces en contact. Cette force s'appelle force de frottement.

Pendant le mouvement relatif de deux corps solides en contact, il peut y avoir glissement ou roulement d'un corps par rapport à l'autre, en fonction de quoi il se crée soit le frottement de glissement, soit le frottement de roulement, ou soit encore simultanément ces deux aspects de frottement.

L'expérience montre également que la force de frottement de glissement diminue si la surface de contact des corps solides est lubrifiée. Si les deux surfaces en contact sont complètement séparées par une couche de lubrifiant, le frottement s'appelle alors frottement fluide; en l'absence totale de lubrifiant, le frottement s'appelle alors frottement sec. Si les deux surfaces en contact ne sont pas complètement séparées par une couche de lubrifiant, le frottement s'appelle alors semi-fluide ou semi-sec en fonction de l'aspect du frottement prédominant.

31. FROTTEMENT DE GLISSEMENT DES CORPS NON LUBRIFIÉS

A. Direction et intensité de la force de frottement. Coefficient de frottement

L'expérience montre que la force de frottement sur la surface de contact de deux corps solides est constamment dirigée dans le sens opposé à la vitesse relative du mouvement ou, si les deux

surfaces se trouvent au repos, dans le sens opposé de la force qui tend à mettre en mouvement un des corps en contact.

La grandeur de la force de frottement dépend de nombreux facteurs, dont l'étude représente certaines difficultés. Dans de nombreux cas et avec une précision suffisante pour la pratique, pour déterminer la grandeur de la force de frottement, on a recours à la formule établie par Coulomb

$$F = fQ, \tag{6}$$

où F est la force de frottement, Q — la force normale à la surface de contact avec laquelle le corps *1* adhère au corps *2* (fig. 125) et f — un coefficient de proportionnalité appelé coefficient de frottement de glissement.

Ainsi, si le corps *1* est animé d'un mouvement par rapport au corps *2* de vitesse v_{12}, la force de frottement F dirigée dans le sens opposé de la vitesse v_{12} et donnée par la formule (6), oppose alors une résistance au mouvement.

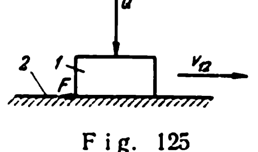


Fig. 125

L'expérience montre que pour les mêmes corps *1* et *2*, une même force Q, les autres conditions étant égales, la force de frottement F_0 qu'il faut vaincre pour mettre en mouvement un des corps au repos par rapport à l'autre, s'avère plus grande que la force de frottement F qui oppose une résistance au corps *1* quand il est en mouvement par rapport au corps *2*. Pour cette raison-là, quand on détermine la force de frottement d'après la formule donnée ci-dessus, il est nécessaire de prendre en considération la différence qui existe entre les valeurs du coefficient de frottement de glissement f et le coefficient de frottement au repos f_0.

La force de frottement étant une force de réaction, la quantité Qf_0 de la force de frottement au repos donnée par la formule (6) est celle susceptible d'opposer une résistance à la force P qui tend à déplacer un des corps en contact par rapport à l'autre, mais si $P < Qf_0$, la force de frottement est égale à la force P.

Le coefficient de frottement de glissement est une grandeur sans dimension, donnée dans les formulaires d'ingénieurs pour différents cas particuliers et où on prend seulement en considération le matériau des corps en mouvement et la netteté avec laquelle les surfaces en contact ont été usinées. En utilisant la valeur du coefficient de frottement donnée dans les formulaires et en déterminant la grandeur de la force de frottement d'après la formule donnée ci-dessus, nous supposerons que la valeur du coefficient de frottement dépend seulement du matériau et de la netteté de la surface, mais non de la vitesse de glissement, de la pression spécifique. et de l'intervalle de temps pendant lequel le glisse-

ment s'effectue. Il faut avoir en vue que cette supposition n'est vraie qu'approximativement et seulement entre les limites pour des vitesses de glissement, des pressions spécifiques et de la durée du glissement, employées par Coulomb dans ses expériences, conformément auxquelles la formule indiquée a été établie. Les limites entre lesquelles étaient effectuées les expériences de Coulomb en 1785 et celles de Morin en 1834, vérifiant les expériences de Coulomb, étaient les suivantes: la vitesse de glissement variait de 0,3 à 3 m/s, la pression à la surface de contact était inférieure à 10 kg/cm². C'est ce qu'il faut avoir en considération puisque dans la technique moderne, on a fréquemment affaire à des vitesses et des pressions sur les surfaces de frottement considérablement plus grandes. Dans les expériences de Coulomb, la durée du glissement n'a été nullement prise en considération.

Les expériences que différents chercheurs ont effectuées après celles de Coulomb et de Morin ont établi, qu'en dehors des limites indiquées, la valeur du coefficient de frottement varie sensiblement en fonction de la vitesse de glissement, de la pression à la surface de frottement, et de la durée de glissement. Par exemple, il a été établi qu'avec l'augmentation de la vitesse de glissement de 2,13 à 26,8 m/s, la valeur du coefficient de frottement diminue presque de 6 fois, mais, pour une même vitesse, elle diminue de presque 3 fois 25 s après le début de l'expérience.

Ce qui vient d'être exposé ci-dessus doit toujours être pris en considération pendant la détermination des valeurs des forces de frottement dans les calculs techniques basés sur les valeurs des coefficients de frottement données dans les formulaires.

B. Angle et cône de frottement

Si le corps *1* (fig. 126) adhère au corps *2* par l'intermédiaire de la force Q_{12}, alors en l'absence de force de frottement, la réaction Q_{21} du corps *2* sur le corps *1* est dirigée suivant la normale à la surface de contact. En présence d'une force de frottement F, la réaction R est la résultante de la réaction normale Q_{21} et de la force de frottement F. L'angle φ formé par la résultante R et la réaction normale Q_{21} s'appelle angle de frottement.

Il découle de la fig. 126 que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F}{Q_{21}} .$$

On trouve donc d'après l'équation (6)

$$\operatorname{tg}\varphi = f, \tag{7}$$

c'est-à-dire que le coefficient de frottement est égal à la tangente de l'angle de frottement.

Ainsi, l'angle de frottement est l'angle formé par la réaction normale et la résultante de la force de frottement et de la réaction normale, soit encore l'angle dont la tangente est égale au coefficient de frottement.

Si le corps *1* est en mouvement suivant différentes directions du plan, la résultante R de la réaction forme un angle φ avec la réaction normale Q_{21} du côté opposé au sens de la vitesse relative du mouvement et appartenant constamment à la surface d'un cône d'angle au sommet 2φ obtenu par la rotation de la résultante R autour de la réaction normale (fig. 127). Ce cône s'appelle cône de frottement.

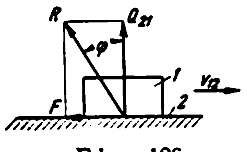


Fig. 126

Fig. 127

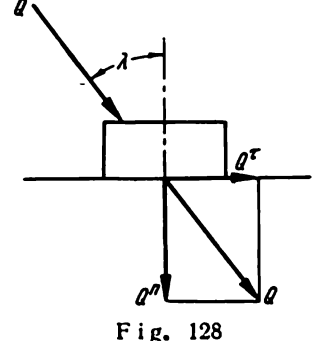


Fig. 128

Autrement dit, on appelle **cône de frottement** la surface obtenue par la rotation de la résultante de la force de frottement et de la réaction normale autour de la réaction normale, ou encore le cône d'angle au sommet égal au double de l'angle de frottement.

C. Frottement sur un plan horizontal

Le mouvement d'un corps sur un plan peut être engendré par l'action d'une force unique, puisque dans tous les cas où plusieurs forces agiraient sur le corps, on peut toujours les ramener à leur résultante générale.

Supposons qu'une force Q (fig. 128) agisse sur un corps en faisant un angle λ avec la perpendiculaire au plan de contact.

Faisons glisser la force Q jusqu'à l'intersection de sa ligne d'action avec la perpendiculaire au plan de contact et décomposons-la suivant deux directions perpendiculaires. La composante normale Q^n, en appliquant le corps au plan, engendre une force de frottement au repos F_0 qui s'oppose au déplacement du corps; la composante tangentielle Q^τ a tendance à faire glisser le corps sur le plan.

Pour qu'il y ait déplacement, il est nécessaire que la condition suivante

$$Q^{\tau} > F_0$$

soit vérifiée.

Puisque

$$Q^{\tau} = Q \sin \lambda,$$
$$F_0 = f_0 Q^{n} = f_0 Q \cos \lambda,$$

où f_0 est le coefficient de frottement au repos, alors

$$Q \sin \lambda > f_0 Q \cos \lambda,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \lambda > f_0$$

ou encore d'après la formule (7)

$$\operatorname{tg} \lambda > \operatorname{tg} \varphi_0;$$
$$\lambda > \varphi_0,$$

où φ_0 est l'angle de frottement au repos.

Il découle de ce qui précède que quelle que soit l'intensité de la force, si elle se trouve à l'intérieur du cône de frottement, elle ne peut pas mettre le corps en mouvement.

Substituant à F_0, f_0 et φ_0 respectivement F, f et φ dans les inégalités précédentes et en remplaçant dans toutes les inégalités le signe $>$ par $\geqslant$, on en conclut que le corps se déplace sur le plan horizontal si la condition $\lambda \geqslant \varphi$ est vérifiée.

Pour $\lambda = \varphi$ on a $Q^{\tau} = F$, le mouvement est à vitesse constante; pour $\lambda > \varphi$, on a $Q^{\tau} > F$ et le mouvement est accéléré.

Pour $\lambda < \varphi_0$, comme il l'a été démontré précédemment, le mouvement est impossible; pour $\lambda < \varphi$ le mouvement du corps, engendré par des forces quelconques et poursuivi par inertie, sous l'action de la force Q, se ralentit puisque dans ce cas, la force de frottement, engendrée par la force Q^{n} qui s'oppose au mouvement, sera plus grande que la force Q^{τ} qui entretient le mouvement.

Il découle de ce qui a été exposé ci-dessus que les problèmes concernant la possibilité de mettre en mouvement un des corps en contact par rapport à l'autre, et la possibilité du mouvement avec une vitesse ou une accélération constante se résolvent de la même manière, mais avec la seule différence, que dans l'un des cas il faut prendre en considération le coefficient f_0 et l'angle φ_0 du frottement au repos, et dans l'autre, le coefficient f et l'angle φ du frottement de glissement.

D. Frottement sur un plan incliné

Considérons d'abord le cas d'un corps placé sur un plan incliné faisant l'angle λ avec l'horizontale. Une force perpendiculaire à l'horizontale (fig. 129) agit sur ce corps, par exemple, le poids du corps.

Dans ce cas, le mouvement est possible vers le bas.

L'angle formé par le vecteur-force Q et la perpendiculaire au plan est λ.

Conformément à ce qui a été exposé ci-dessus, pour qu'il y ait mouvement, il faut que la condition

$$\lambda \geqslant \varphi$$

soit vérifiée.

Pour $\lambda < \varphi$, sous l'action de la force perpendiculaire à l'horizontale, le mouvement, indépendamment de l'intensité de la force, ne peut ni être engendré, ni se poursuivre sans ralentissement.

Un plan dont l'angle avec l'horizontale est plus petit que l'angle de frottement s'appelle plan d'autofreinage. Le phénomène d'autofreinage est fréquemment utilisé en technique dans divers mécanismes.

Considérons à présent le cas d'un corps posé sur un plan faisant l'angle λ avec l'horizontale et sur lequel agissent deux forces, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à l'horizontale. Dans ce cas, le mouvement du corps est possible dans les deux directions. Trouvons les conditions pour lesquelles le mouvement est possible dans chacune des deux directions.

a) Mouvement d'un corps vers le haut suivant un plan incliné (fig. 130). Dans ce cas, la force P parallèle à l'horizontale est dirigée de gauche à droite. Pour que le mouvement vers le haut sur le plan soit possible, il faut que la réaction R des forces P et Q fasse un angle β avec la perpendiculaire au plan non inférieur à l'angle φ de frottement, c'est-à-dire, il faut que la condition

$$\beta \geqslant \varphi$$

soit satisfaite.

Il découle de la construction que

$$P = Q \operatorname{tg}(\lambda + \beta).$$

De l'inégalité et de l'égalité données ci-dessus, il découle que la condition pour que le mouvement vers le haut sur le plan incliné soit possible est la suivante

$$P \geqslant Q \operatorname{tg}(\lambda + \varphi). \qquad (8)$$

b) Mouvement d'un corps vers le bas sur un plan incliné (fig. 131). Dans ce cas, on déduit de la construction que la réaction R est égale à

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,(\lambda - \beta)$$

et, par conséquent, le mouvement vers le bas sur le plan incliné est possible pour $\beta \geqslant \varphi$ si la condition

$$P \leqslant Q\,\mathrm{tg}\,(\lambda - \varphi) \tag{9}$$

est satisfaite.

Sur la fig. 131, la force P est dirigée de gauche à droite, par conséquent, c'est une force qui s'oppose au mouvement. La force P

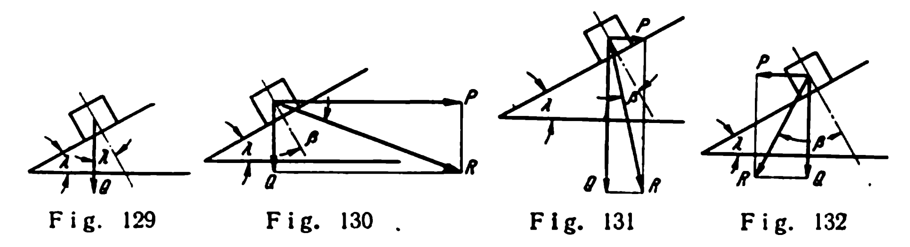


Fig. 129 Fig. 130 Fig. 131 Fig. 132

dirigée de droite à gauche (fig. 132) est nécessaire au mouvement du corps vers le bas, seulement dans le cas si sous l'action d'une seule force Q il n'y aurait pas de mouvement, c'est-à-dire dans le cas $\lambda \leqslant \varphi$.

D'après la construction (fig. 132) on trouve

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,(\beta - \lambda).$$

Pour $\beta \geqslant \varphi$ et pour le sens de la force P indiqué sur la fig. 132, l'intensité de la force P doit satisfaire à la condition

$$P \geqslant Q\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \lambda). \tag{10}$$

E. Frottement du coin trapézoïdal

Dans tous les cas étudiés précédemment, on supposait que la force qui faisait adhérer le corps au plan de frottement était dirigée perpendiculairement à ce plan. Dans ces cas, d'après l'équation (6), l'intensité de la force de frottement s'obtenait en multipliant la force, qui appliquait le corps au plan, par le coefficient de frottement.

On a représenté sur la fig. 133 un coin de section transversale de forme trapézoïdale qui, par l'intermédiaire de la force Q, est appliqué aux deux plans de frottement, formant l'angle γ avec la ligne d'action de la force Q. Si le coin trapézoïdal se déplace

dans la direction perpendiculaire au plan de la figure, l'intensité de la force de frottement, d'après la formule (6), est égale à

$$F = 2Nf,$$

où N est une force perpendiculaire au plan de frottement.

En prenant en considération que la somme des projections des forces sur une verticale est égale à zéro, on trouve

$$2N = \frac{Q}{\sin\gamma}.$$

En introduisant la notation $\frac{f}{\sin\gamma} = f'$, on a

$$F = Qf', \qquad (11)$$

où la quantité f' s'appelle coefficient de frottement fictif ou réduit.

Dans les calculs techniques, on a affaire au coefficient de frottement fictif ainsi qu'à l'angle de frottement fictif φ' donné par l'égalité $\operatorname{tg}\varphi' = f'$, dans le cas où la force, qui applique un des corps sur l'autre, ne serait pas dirigée suivant la normale à la surface de frottement. Puisque $f' > f$, alors, dans les cas où pour une force déterminée appliquant un corps sur l'autre, il serait désirable d'obtenir une force de frottement maximale, les surfaces de frottement forment quelquefois des angles non droits avec la ligne d'action de la force d'application. Ainsi, pour diminuer la force qui applique des roues à friction l'une sur l'autre, les jantes de ces roues sont quelquefois de forme trapézoïdale (fig. 134). Un autre exemple sera donné au point suivant de ce paragraphe.

Si au lieu du coin trapézoïdal qui se déplace dans la direction perpendiculaire au plan de la figure, on considère un tronc de cône plein (fig. 133) appliqué par la force Q contre la surface intérieure d'un tronc de cône évidé, alors l'intensité de la force de frottement qui s'oppose à la rotation du tronc de cône plein dans le tronc de cône évidé doit également être déterminée d'après l'équation (11).

F. Frottement dans les vis

Pour déterminer les intensités de la force de frottement qui se crée à la surface de contact d'une vis et d'un écrou, on suppose que la surface hélicoïdale de la vis représente un plan incliné où l'écrou tient le rôle d'une charge placée sur le plan incliné, ou inversement, que le plan incliné est la surface hélicoïdale développée d'un écrou et que la vis représente une charge posée sur ce plan.

En faisant cette supposition, il faut avoir en vue qu'en réalité la surface hélicoïdale développée ne représente pas un plan incliné faisant un angle déterminé avec l'horizontale. On peut engendrer la surface hélicoïdale en déplaçant un segment de droite AB (fig. 135) de manière que le point A décrive l'hélice et que le segment de droite reste normal à la surface latérale du cylindre ou, ce qui est équivalent, soit perpendiculaire à l'axe du cylindre. Pour une rotation autour de l'axe du cylindre, quand le segment de droite AB prend la position A_1B_1, tous les points du segment se déplacent le long de l'axe du cylindre d'un même pas t, mais tous les points se déplacent suivant des cylindres de diamètres différents : le point extrême A du segment se déplace sur un cylindre de diamètre d_1, l'autre point extrême B sur un cylindre de diamètre d non représenté sur la fig. 135.

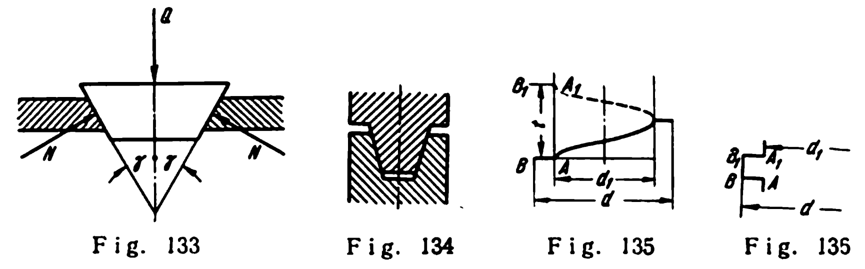


Fig. 133 Fig. 134 Fig. 135 Fig. 136

L'angle d'inclinaison λ_A de l'hélice suivant laquelle le point A se déplace est : $\lambda_A = \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\pi d_1}$, l'angle d'inclinaison λ_B de l'hélice suivant laquelle le point B se déplace est $\lambda_B = \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\pi d}$. Puisque $d_1 < d$, alors $\lambda_A > \lambda_B$.

En supposant que la surface hélicoïdale développée représente un plan incliné faisant un angle défini avec l'horizontale, soit l'angle λ_A ou λ_B, nous tolérons une erreur qui n'a pas d'importance pratique si la longueur du segment de droite AB est petite par rapport au diamètre d_1 ou d, ce qui d'ailleurs a presque toujours lieu dans la construction des machines. On aura une erreur encore plus petite si on suppose que la surface hélicoïdale développée représente un plan incliné faisant avec l'horizontale un angle égal à l'angle d'inclinaison de l'hélice sur le diamètre moyen, c'est-à-dire l'angle défini par l'équation

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{t}{\pi \frac{d_1 + d}{2}}.$$

On peut se représenter le filet de la vis sous forme du rectangle ABB_1A_1 (fig. 136) ou du triangle ABA_1 (fig. 137) obtenu

par le mouvement des points A et A_1 du profil du filet le long des hélices tracées sur un cylindre de diamètre d_1; pendant ce mouvement, le segment de droite AA_1 doit constamment rester parallèle à l'axe du cylindre. En pratique, le filet de la vis s'obtient, il va de soi, en enlevant du matériau au cylindre de diamètre d à l'aide d'un instrument tranchant. De la même manière, on peut se représenter le processus de formation en pratique du filet d'un écrou.

En développant en pensée les surfaces en contact de la vis et de l'écrou et en se représentant un des chaînons du couple hélicoïdal sous forme de plan incliné, partant de ce que d'après la formule (6) la force de frottement est indépendante des dimensions

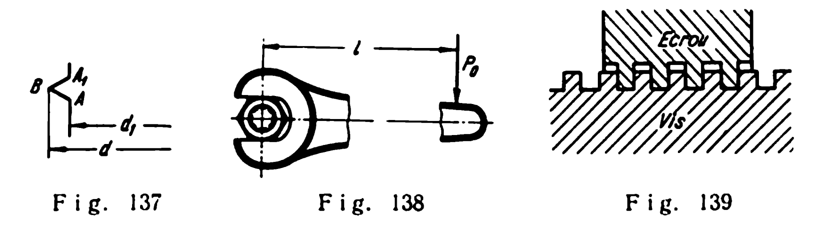


Fig. 137 Fig. 138 Fig. 139

de la surface de contact, on peut supposer que l'autre chaînon est concentré dans la charge posée sur ce plan. En agissant ainsi, nous pouvons utiliser les formules (8), (9) et (10) qui établissent des relations entre les forces P et Q agissant sur le corps posé sur le plan incliné. Quand on applique ces formules au couple hélicoïdal, il faut prendre pour angle λ, dans ces formules, l'angle d'inclinaison de l'hélice sur son diamètre moyen, pour force Q la force dirigée suivant l'axe du couple, pour force P celle dirigée suivant la tangente à la circonférence dont le rayon est égal au rayon moyen du filet de vis. Si r est le rayon moyen du filet de vis et M—le moment qui met en rotation le chaînon mobile du couple hélicoïdal (vis ou écrou), alors $P=\frac{M}{r}$. Par exemple, si P_0 est la force avec laquelle l'ouvrier doit agir sur une clé pour serrer ou desserrer un écrou (fig. 138), l—la distance du point d'application de la force P_0 à l'axe du couple hélicoïdal, alors $P=P_0\frac{l}{r}$.

On peut se servir des formules indiquées ci-dessus pour déterminer les forces P et Q seulement dans les vis à filet carré (fig. 139). En décomposant la force axiale Q (sur un plan incliné—la force perpendiculaire au plan horizontal, voir fig. 140), on a la composante $Q\cos\lambda$ qui applique les chaînons du couple hélicoïdal l'un sur l'autre. Dans un filet carré cette force est normale à la surface

de frottement (fig. 141) et, par conséquent, elle engendre une force de frottement égale à $fQ\cos\lambda$. Dans un filet hélicoïdal (fig. 142), la force $Q\cos\lambda$ n'est pas normale à la surface de frottement (fig. 143) et, par suite, pour déterminer l'intensité de la force de frottement engendrée par cette force, la force $Q\cos\lambda$ doit être multipliée par le coefficient de frottement fictif f' qui est égal à $f'=\frac{f}{\cos\beta}$, où β est la moitié de l'angle au sommet du profil du filet hélicoïdal. C'est pourquoi, quand on applique les formules (8), (9) et (10) aux vis à filet hélicoïdal, l'angle de frottement φ, participant dans les formules, doit être remplacé par l'angle de frottement fictif φ'.

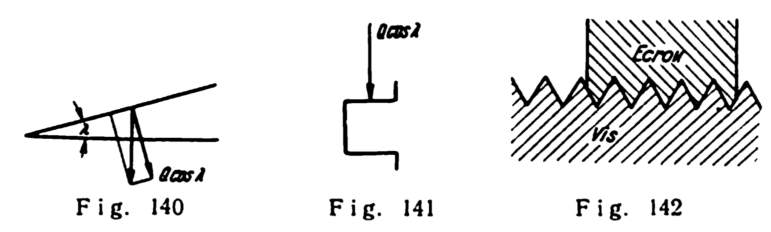


Fig. 140 Fig. 141 Fig. 142

Les autres conditions restant égales, dans la vis à filet hélicoïdal la force de frottement est supérieure à celle de la vis à filet carré, il est donc plus avantageux d'appliquer le filet hélicoïdal pour les pièces de fixation (boulons, goujons, vis) où il est désirable d'avoir une force de frottement très élevée, quant au filet carré, il sera choisi dans les vis servant à transmettre le mouvement.

En U.R.S.S., pour les vis de fixation, on a établi un filet standard à profil sous forme de triangle équilatéral. D'après certaines considérations pratiques, au lieu d'un filet carré pour les vis transmettant le mouvement, on a standardisé le filet à profil sous forme de trapèze (fig. 144) dont l'angle au sommet du profil est 30°. L'augmentation de la force de frottement dans le filet trapézoïdal par rapport au filet carré est insignifiante, puisque le cosinus du demi-angle au sommet du profil est voisin de l'unité ($\cos 15° = 0{,}966$), et par suite, la différence entre les coefficients f' et f est aussi très petite ($f' \approx 1{,}03 f$).

Pour le filet métrique (c'est ainsi qu'on appelle le filet standard pour les pièces de fixation), l'angle au sommet du profil est égal à 60°, par conséquent,

$$f'=\frac{f}{\cos 30°}=1{,}15\, f.$$

Dans les vis de fixation, le filet doit nécessairement agir comme autofrein sans quoi ces vis ne rempliraient pas leur désignation.

Expliquons à présent comment, en appliquant les formules (8), (9) et (10), on peut résoudre le problème relatif aux valeurs des

forces agissant sur un boulon et son écrou pendant le serrage du boulon.

Quand un boulon assemble deux pièces A et B (fig. 145 *a*), le boulon est introduit dans les ouvertures de ces pièces, puis on visse l'écrou sur la partie supérieure filetée du boulon. Tant que l'écrou n'a pas atteint la pièce A, le filet du boulon fixe représente un plan incliné vissé sur le cylindre, tandis que l'écrou joue le rôle de charge posée sur le plan et se déplace de haut en bas pour la position du boulon comme l'indique la fig. 145 *a*. Conservé dans une position quelconque, par exemple, celle indiquée sur la fig. 145 *a*, l'écrou ne se déplace pas vers le bas sous l'action de son poids, puisque le triangle du filet du boulon est autofrein,

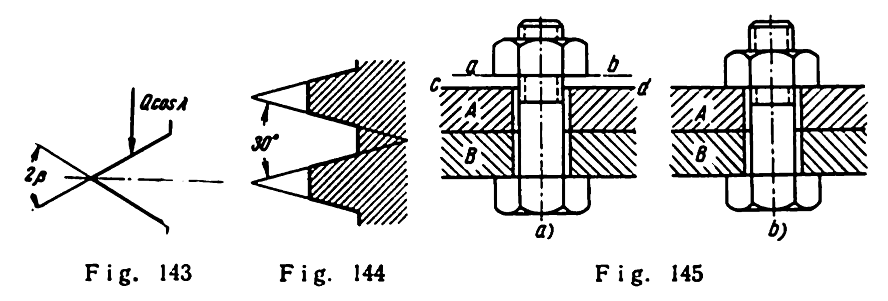


Fig. 143 Fig. 144 Fig. 145

c'est-à-dire satisfait à la condition $\lambda < \varphi'$. Pour mettre en contact la surface inférieure *ab* de l'écrou avec la surface supérieure *cd* de la pièce A, il faut faire tourner l'écrou avec un moment Pr, où r est le rayon moyen du filet, P — la force appliquée au rayon moyen et définie d'après la formule (10), où l'angle de frottement φ a été remplacé par l'angle de frottement fictif φ' et la force Q est le poids faible de l'écrou. Le petit moment nécessaire au mouvement de l'écrou pour atteindre la pièce A est créé par les doigts de l'ouvrier.

Quand la surface inférieure de l'écrou coïncide avec la surface supérieure de la pièce A, alors on a besoin d'un moment de rotation sensiblement supérieur pour la rotation ultérieure de l'écrou en vue de serrer le boulon. En tournant, l'écrou doit se déplacer suivant le boulon vers le bas dans la position indiquée sur la fig. 145 *b*, mais ce mouvement est empêché par la pièce A sur laquelle le boulon s'appuie déjà. En tournant et en restant en contact avec la pièce A, l'écrou aurait pu se déplacer vers le bas par rapport au boulon si le boulon avait pu se déplacer vers le haut, mais la pièce B, sur laquelle la tête du boulon s'appuie, entrave ce mouvement. La rotation du boulon d'un certain angle est tout de même possible, ce qui est nécessairement effectué lors du serrage du boulon.

Pendant ce mouvement de rotation, l'écrou, en s'appuyant par sa surface inférieure à la pièce A et en agissant par son filet sur le filet de l'écrou, allonge l'écrou d'une longueur insignifiante. A cette étape, les rôles du boulon et de l'écrou s'intervertissent : l'écrou devient comme un plan incliné, tandis que le boulon devient une charge qui peut se déplacer de bas en haut sur le plan incliné.

Pendant l'allongement du boulon, il se produit essentiellement ce qui aurait eu lieu dans le dispositif représenté schématiquement sur la fig. 146, si la charge Q, correspondant au boulon et ne pouvant être animée que d'un mouvement ascentionnel, était déplacée par la pièce D correspondant à l'écrou.

En agissant avec une certaine force P_m dirigée sur la fig. 146 de droite à gauche, on peut soulever la charge Q (sur la fig. 145 *b* allonger le boulon avec la force Q) en déplaçant en même temps la charge par rapport à la pièce D de gauche à droite (de la même manière qu'en serrant l'écrou sur le boulon sur la fig. 145 *b*).

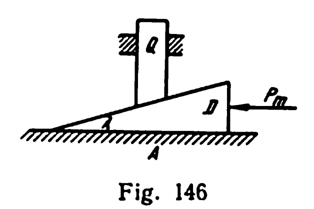


Fig. 146

Sur la fig. 146, la force P_m doit surmonter la résistance de la charge Q et la force de frottement du plan incliné et, de plus, la force de frottement du plan horizontal de contact des pièces A et D. La force nécessaire pour déplacer de gauche à droite la charge Q par rapport à la pièce D doit être déterminée d'après la formule (8); la force de frottement sur le plan de contact des pièces A et D est Qf (le poids de la pièce D n'est pas pris en considération). Donc

$$P_m = Q\,\mathrm{tg}\,(\lambda + \varphi) + Qf,$$

où φ est l'angle de frottement sur le plan incliné et f — le coefficient de frottement sur le plan horizontal.

De même, le moment, engendré par l'ouvrier, qui agit pendant le serrage du boulon sur la manche de la clé avec la force P_0 (voir fig. 138), doit surmonter le moment $P_r = Qr\,\mathrm{tg}\,(\lambda + \varphi')$ où P_r est la force exercée sur le rayon moyen du filet et Q — la force qui allonge le boulon, ainsi que le moment QfR de la force de frottement du plan de contact de l'écrou et de la pièce A, où R est le rayon du cercle sur lequel on peut supposer que la résultante générale des forces de frottement élémentaires est appliquée (voir ci-dessous au point «H» la détermination de R).

Le boulon serré à l'aide de la clé est sous tension à l'état allongé parce que le filet autofrein, sous l'action de la force axiale, ne peut se dévisser et revenir à la position initiale.

Pendant le démontage de l'assemblage, il faut pour desserrer l'écrou un moment de

$$M > Qr\,\mathrm{tg}\,(\varphi_0'-\lambda)+Qf_0R_1,$$

où φ_0' est l'angle de frottement fictif au repos dans le filet et f_0 — le coefficient de frottement au repos entre l'écrou et la pièce A.

G. Frottement dans les couples de rotation

Un couple cinématique de rotation est donné par le tourillon (partie de l'arbre qui est posée sur un appui) et le palier qui le contient.

Pour que le tourillon, qui se trouve sous l'action de plusieurs forces, puisse être animé d'un mouvement de rotation il faut que la résultante générale Q de ces forces (fig. 147) crée un moment non inférieur au moment de la force de frottement.

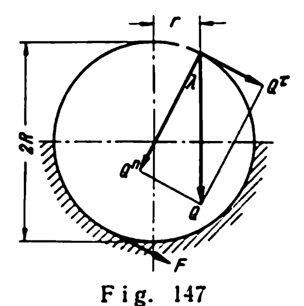


Fig. 147

En décomposant la force Q en composantes normale Q^n et tangentielle Q^τ et en désignant par r le bras de levier de la force Q par rapport à l'axe de rotation du tourillon, par R — le rayon du tourillon et par λ l'angle formé par la ligne d'action de la force Q et le rayon mené au point d'application de la force Q, on trouve: le moment du tourillon en rotation est

$$Q^\tau R = QR\sin\lambda\,;$$

le moment de la force de frottement F est

$$FR = fQ^nR = QRf\cos\lambda = QR\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\lambda.$$

Pour qu'il y ait rotation, il faut que la condition

$$QR\sin\lambda \geqslant QR\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\lambda$$

soit vérifiée, d'où

$$\mathrm{tg}\,\lambda \geqslant \mathrm{tg}\,\varphi;\quad \lambda \geqslant \varphi$$

et donc

$$r = R\sin\lambda \geqslant R\sin\varphi.$$

Par conséquent, le moment de la force Q ne peut faire tourner le tourillon si la ligne d'action de la force Q passe à l'intérieur du cercle de rayon $R\sin\varphi$.

Ce cercle s'appelle *cercle de frottement*.

H. Frottement dans les crapaudines

Dans les crapaudines, il y a frottement à la surface de contact de deux corps appliqués l'un sur l'autre et dont l'un est en mouvement de rotation par rapport à l'autre autour de la normale à la surface de contact (fig. 148).

En prenant en considération la résistance exercée par les forces de frottement au moment qui met en rotation un corps par rapport à l'autre, on doit déterminer le moment résultant des forces de frottement en remplaçant les forces de frottement élémentaires sur toute la surface de frottement par leur résultante générale appliquée sur la circonférence de rayon R. On détermine le rayon R en supposant que la surface de frottement est une couronne circulaire de rayon extérieur r_1 et de rayon intérieur r_2 et que la rotation a lieu autour du centre commun aux circonférences de rayons r_1 et r_2 (fig. 149).

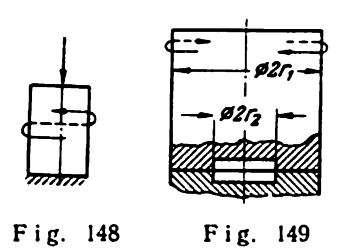


Fig. 148 Fig. 149

La force totale de frottement au glissement est

$$pf\pi(r_1^2 - r_2^2),$$

où p est la pression à la surface de contact, c'est-à-dire la force appliquée à l'unité de surface en frottement et $\pi(r_1^2 - r_2^2)$ l'aire de la surface en frottement.

La force de frottement élémentaire répartie sur la couronne circulaire d'aire $2\pi r dr$ est

$$pf\, 2\pi\, r dr.$$

Le moment total de la force de frottement est

$$pf\pi(r_1^2 - r_2^2)\, R,$$

où R est le rayon du cercle sur lequel est appliquée la résultante des forces de frottement élémentaires.

Ce même moment peut être exprimé encore de la manière suivante

$$\int_{r_2}^{r_1} pf\, 2\pi r^2\, dr = 2\, pf\pi \int_{r_2}^{r_1} r^2\, dr.$$

En effectuant l'intégration et en simplifiant par $pf\pi$ on aboutit à l'équation

$$(r_1^2-r_2^2)\,R=2\int_{r_2}^{r_1} r^2\,dr;$$

$$(r_1^2-r_2^2)\,R=\frac{2}{3}\,(r_1^3-r_2^3),$$

d'où

$$R=\frac{2}{3}\cdot\frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^2-r_2^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{r_1+r_2}\,.$$

Pour $r_2=0$ on a

$$R=\frac{2}{3}\,r_1.$$

32. FROTTEMENT DE GLISSEMENT DES CORPS LUBRIFIÉS

Si les surfaces des corps en frottement sont entièrement recouvertes d'une couche de lubrifiant, alors le frottement, comme on l'a dit précédemment, s'appelle frottement fluide. La résistance au mouvement relatif dans le cas du frottement fluide est conditionnée par des facteurs distincts de ceux qui définissent la force de frottement dans le cas de frottement sec.

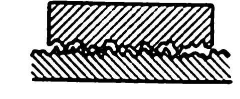


Fig. 150

Pour des surfaces en frottement non lubrifiées, la résistance au mouvement relatif est due avant tout à ce que les aspérités minuscules, invisibles à l'œil nu, de la surface d'un des corps en frottement, représentées sur la fig. 150 fortement agrandies, sont retenues par des aspérités semblables de la surface de l'autre corps. Cet état de chose est confirmé par le fait que la force de frottement, pour d'autres conditions égales, diminue pour les surfaces usinées avec plus de soin.

Cependant, la force de frottement ne décroît pas indéfiniment en fonction de l'amélioration de l'usinage des surfaces; de plus, si on conserve toutes les autres conditions et qu'on passe à des surfaces usinées de plus en plus avec soin, on remarque alors qu'en atteignant une certaine limite pour les soins apportés à l'usinage, la force de frottement commence à augmenter. Ceci s'explique par le fait que les forces de cohésion moléculaire commencent à avoir une action importante dès que l'adhérence des surfaces est très grande. Ainsi, les surfaces soigneusement polies de deux corps, dont les aspérités ont des hauteurs ne dépassant pas un deux millièmes de millimètre (c'est ainsi qu'on usine les surfaces des dalles

utilisées pour le contrôle des calibres limites) s'attirent avec une force de 125 g/cm² environ.

En présence d'une couche de fluide entre les surfaces de deux corps en mouvement l'un par rapport à l'autre, l'influence des facteurs indiqués précédemment tels que la rugosité des surfaces et la cohésion moléculaire, s'élimine et la résistance au mouvement relatif est conditionnée seulement par le frottement à l'intérieur de la couche de fluide. Dans ce cas, les fines couches de fluide adhèrent aux surfaces des corps en mouvement l'un par rapport à l'autre et sont en mouvement par rapport aux couches de fluide qui s'y adhèrent les entraînant et les devançant même partiellement.

La détermination de la force de frottement dans le cas de frottement fluide est fondée sur la loi de Newton relative à la viscosité des fluides d'après laquelle

$$F=\frac{\eta \cdot S \cdot v}{h},$$

où F est la force de frottement en kg;

η le coefficient de viscosité du fluide en kg s/m²;

S la surface de frottement en m²;

v la vitesse relative du mouvement en m/s;

h l'épaisseur de la couche de fluide en m.

Si d'après la formule (6) de Coulomb donnée précédemment on détermine la force de frottement dans une couche de fluide, alors le coefficient de frottement f doit être défini par la formule

$$f=\frac{\eta v}{hp},$$

qu'on déduit de l'équation de Newton après les substitutions

$$F=Qf \text{ et } \frac{Q}{S}=p.$$

Il est supposé dans la formule de Coulomb que le coefficient de frottement à sec ne dépend pas de la vitesse de glissement, mais comme cela a été mentionné plus haut, différents chercheurs postérieurs à Coulomb ont établi que pour les vitesses supérieures à celles des expériences de Coulomb le coefficient de frottement diminue sensiblement. Au contraire, le coefficient de frottement fluide augmente proportionnellement à la vitesse de glissement.

Les phénomènes complexes qui ont lieu dans une couche de lubrifiant furent pour la première fois étudiés par le fondateur de la théorie hydraulique du frottement, N. Pétrov, professeur à l'institut technologique de Pétersbourg, dans sa brillante étude intitulée „Frottement dans les machines et influence des fluides lubrifiants sur le frottement", publiée en 1883.

Dans la majorité des cas, on observe sur les surfaces lubrifiées des corps en mouvement l'un par rapport à l'autre non pas un régime de frottement fluide, mais bien celui de frottement semi-fluide ou semi-sec. Pour ce régime, on n'a pas encore établi de formule fondée théoriquement et c'est pourquoi, pour déterminer la force de frottement dans ces cas, on a recours à la formule de Coulomb après avoir sensiblement diminué les coefficients de frottement par rapport aux coefficients admis dans le phénomène de frottement sec. Ainsi, le coefficient de frottement de l'acier-bronze pendant le frottement à sec est environ de 0,18, tandis que pour le frottement semi-sec en fonction de certaines circonstances, sa valeur oscille entre 0,02 et 0,08.

33. FROTTEMENT DES CORPS FLEXIBLES

Si un corps idéalement flexible et inextensible, c'est-à-dire un corps parfaitement indéformable sous l'action de toute force extensible et qui n'offre aucune résistance au fléchissement, enveloppe un cylindre fixe suivant l'arc de circonférence *ab* d'angle au centre α (fig. 151) et se trouve sous l'action des forces S_1 et S_2, alors, pour qu'il puisse être en mouvement sur le cylindre avec une vitesse uniforme, il doit nécessairement satisfaire à la condition

$$S_1 = S_2 + F,$$

où F est la force de frottement entre le corps flexible et le cylindre.

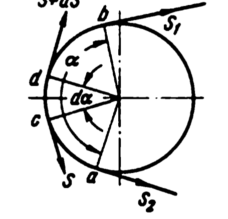


Fig. 151

Puisque la force de frottement est répartie sur l'arc de contact *ab* du corps flexible et du cylindre, alors la tension du corps flexible, à partir de son point de départ *a* sur le cylindre jusqu'à son point d'arrivée *b*, croît suivant une certaine loi de S_2 à S_1. Au point *c* de l'arc infiniment petit *cd* la tension atteint une certaine valeur S, au point *d* elle augmente jusqu'à $S+dS$.

La force de frottement infiniment petite sur l'arc *cd* qui conditionne l'augmentation de la tension de dS et, par conséquent, égale à dS peut être exprimée de la manière suivante

$$dS = f dN,$$

où f est le coefficient de frottement et dN la force infiniment petite perpendiculaire à la surface de frottement.

L'intensité de la force dN est donnée par les projections des tensions S et $S+dS$ sur un rayon mené par le milieu de l'arc *cd* :

$$dN = S \sin\frac{d\alpha}{2} + (S+dS)\sin\frac{d\alpha}{2} = 2S\sin\frac{d\alpha}{2} + dS\sin\frac{d\alpha}{2}.$$

Puisque $\sin d\alpha = d\alpha$ et $dS \sin \frac{d\alpha}{2} = 0$, comme grandeur infiniment petite d'ordre supérieur, alors

$$dN = S d\alpha;$$
$$dS = f dN = f S d\alpha.$$

En séparant les variables, on a

$$\frac{dS}{S} = f d\alpha.$$

En intégrant, puis en prenant les logarithmes, on a

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} f d\alpha;$$
$$\int_{S_2}^{S_1} d \operatorname{Log} S = f \int_0^{\alpha} d\alpha;$$
$$\operatorname{Log} \frac{S_1}{S_2} = f\alpha;$$
$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}.$$

Cette dépendance entre la force S_1 qui met en mouvement le corps idéalement flexible et inextensible qui enveloppe le cylindre et la force S_2 qui s'oppose au mouvement, a été établie par l'éminent savant L. Euler, membre de l'Académie des sciences de Russie.

Conformément à la formule d'Euler, la force de frottement sur la surface de contact du corps flexible qui enveloppe le cylindre est

$$F = S_1 - S_2 = S_2 (e^{f\alpha} - 1).$$

D'après cette formule, l'intensité de la force de frottement dépend aussi, dans une grande mesure, du coefficient de frottement et de l'angle d'enroulement; il n'est pas difficile de s'en convaincre, en faisant les substitutions adéquates dans la formule d'Euler, que pour $f = 0{,}35$, en enroulant le corps flexible quatre fois autour du cylindre ($\alpha = 8\pi$), une force de 1 kg peut équilibrer une force de 6500 kg.

Dans le calcul de la transmission par courroie on a affaire avec les valeurs approximatives suivantes: $f \approx 0{,}35$; $\alpha = \pi$. Pour ces valeurs, la tension de la partie menante de la courroie qui entraîne en rotation la poulie menée est approximativement trois fois plus grande que la tension de la partie menée. Cependant, pour le calcul d'une transmission par courroie, la formule d'Euler n'est applicable que si on y apporte des rectifications empiriques.

La nécessité de ces rectifications découle 1) de ce que la courroie n'est pas un corps idéalement flexible et inextensible et 2) de ce que, pendant la rotation de la poulie, la courroie est soumise à l'action de la force centrifuge qui fait décroître la pression de la courroie sur la poulie et, par conséquent, diminuer la force de frottement.

34. FROTTEMENT DE ROULEMENT

Pendant le roulement d'un cylindre ou d'une boule, il se produit le renversement continu du corps qui roule sur la surface de roulement. Si on suppose que le corps qui roule est en contact avec la surface de roulement suivant une courbe (cas du cylindre), ou en un point (cas de la boule), et si de plus on suppose que la ligne d'action de la force, qui applique le corps en roulement sur

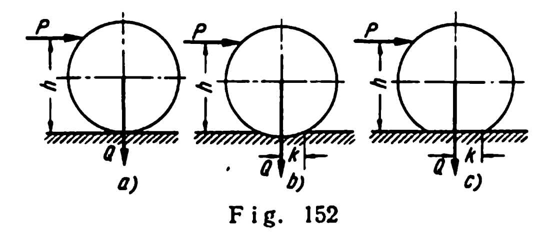


Fig. 152

la surface de roulement, passe par la courbe ou le point de contact, alors on conclut que la résistance au roulement dans ce cas ne doit pas avoir lieu; le moment de la force Q (fig. 152*a*) qui applique le corps qui roule sur la surface de roulement, est nul et, par conséquent, le moment de la force P, qui engendre le renversement continu du corps, ne rencontre aucune résistance. Cependant, l'expérience montre qu'il y a résistance au roulement.

La résistance au roulement se manifeste parce que les corps appliqués l'un contre l'autre par une certaine force même insignifiante se déforment et que à l'état déformé ils se trouvent en contact non pas suivant une courbe ou un point, mais bien suivant une certaine surface adjacente à cette courbe ou à ce point. Pendant la déformation de la surface qui se trouve sous le corps qui roule (fig. 152*b*) et pendant la déformation du corps qui roule (fig. 152*c*), et, par conséquent, pendant la déformation simultanée du corps et de la surface, la courbe ou le point au voisinage duquel il se produit renversement s'écarte d'une certaine distance k de la ligne d'action de la force Q. Ceci a pour résultat de créer un bras de levier k pour la force Q de moment Qk s'opposant au moment de renversement Ph.

Pendant le roulement avec une vitesse constante, on doit avoir la relation évidente

$$Ph = Qk,$$

où k est une grandeur qui caractérise les conditions d'après lesquelles le roulement s'effectue; elle s'appelle **coefficient de frottement de roulement**. Contrairement au coefficient de frottement de glissement, le coefficient de frottement de roulement est une grandeur de dimension linéaire.

Le phénomène de roulement est observé grâce au frottement de glissement : le roulement d'un corps sur un autre peut avoir lieu seulement dans le cas si la résistance au glissement est supérieure à la résistance au frottement.

Pour faire rouler un corps sur un plan, il faut appliquer au corps une force égale à

$$P_k = Q\frac{k}{h}$$

et pour le roulement il faut lui appliquer une force égale à

$$P_c = Qf.$$

Si $\frac{k}{h} < f$ et, par conséquent, $P_k < P_c$, alors le corps roule sans glisser, dans le cas contraire, le corps glisse sans rouler. Pour $\frac{k}{h} = f$ on aura des possibilités égales de roulement et de glissement.

Puisque pour la substitution du frottement de glissement par celui de roulement, la force de frottement diminue, et dans la plupart des cas sensiblement, alors, pendant le déplacement de charges sur un plan il est avantageux de disposer sous ces charges un rouleau sous forme de tiges cylindriques ou des tronçons de tuyaux, ce qui d'ailleurs se fait souvent.

Pendant le déplacement d'une charge de poids Q sur des rouleaux de rayons R (fig. 153), on doit surmonter la force de frottement de roulement entre la charge et les rouleaux et entre les rouleaux et le plan. Dans ce cas, la force P qui agit sur la charge s'avère appliquée aux rouleaux aux points de contact avec la charge et engendre un moment $2PR$ qui anime les rouleaux d'un mouvement de rotation. La résistance de roulement a pour moments $\frac{Q}{n}k_1$ et $\left(\frac{Q}{n} + G\right)k_2$, où G est le poids du rouleau ; n — le nombre de rouleaux ; k_2 et k_1 sont respectivement les coefficients de frottement de roulement entre les rouleaux et le plan et les rouleaux et la charge.

Pendant le mouvement avec une vitesse constante, on a

$$2PR = n\frac{Q}{n}k_1 + n\left(\frac{Q}{n} + G\right)k_2 = Qk_1 + (Q + nG)k_2.$$

Pour $k_1 = k_2 = k$, en négligeant le poids des rouleaux, on a

$$P = Q\frac{k}{R}.$$

Puisque les rouleaux par rapport à la charge se déplacent dans le sens opposé au mouvement de la charge, alors les rouleaux sortis de dessous la charge doivent être à nouveau disposés sous la charge, ce qui rend incommode le déplacement de la charge sur les rouleaux pour de grandes distances ou de grandes vitesses.

Pendant le déplacement d'une charge (fig. 154) sur roues, les roues sont entraînées par la caisse chargée du chariot, mais comme les roues sont en rotation sur des essieux reliés à la charge, alors, en plus de la force de frottement de roulement entre les roues et le plan pendant le mouvement de la charge, on doit surmonter aussi la force de frottement de glissement entre les roues et les essieux autour desquels elles sont en rotation.

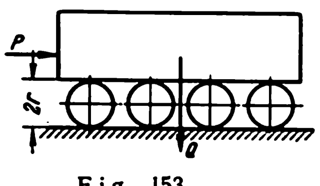


Fig. 153

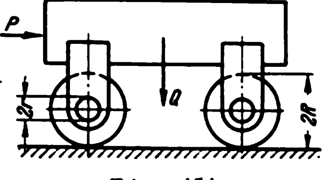


Fig. 154

Pendant le déplacement de la charge avec une vitesse constante, au moment PR de la force P, supposée appliquée à la distance R du plan suivant la ligne d'action parallèle au plan, s'opposent : 1) le moment de la force de frottement de roulement $(Q+G)k$, où G est le poids total des roues et 2) le moment de la force de frottement de glissement frQ, où r est le rayon de l'essieu des roues. On a donc

$$PR = (Q+G)k + frQ,$$

d'où

$$P = \frac{(Q+G)k + frQ}{R};$$

en négligeant le poids des roues, on a

$$P = Q\frac{k+fr}{R} = Qk_0,$$

où la quantité, sans dimension, k_0 s'appelle **coefficient de traction**.

La tendance à substituer le frottement de glissement par le frottement de roulement dans les paliers des arbres et des essieux a abouti à l'invention de toute une série de paliers de roulement qui sont très répandus dans la technique moderne.

Nous passons de la charge *C* qui glisse sur le plan Π (fig. 155) au palier à glissement ; en donnant aux surfaces de frottement de la charge et du plan des formes cylindriques (fig. 156), on a, au lieu d'une charge, la surface d'appui d'un arbre ou d'un essieu, c'est-à-dire le tourillon *C*, et au lieu du plan, la surface du palier à glissement Π. Le palier à roulement peut s'obtenir de la même

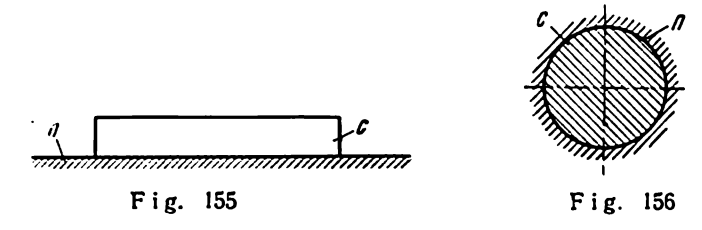


Fig. 155 Fig. 156

manière en partant d'une charge *C* qui se déplace sur des rouleaux *R* sur un plan Π (fig. 157) en donnant, dans ce cas, aux surfaces d'appui des formes cylindriques (fig. 158). Puisque le coefficient de frottement de roulement est d'autant plus petit que les matériaux des corps en roulement (dans les roulements à billes

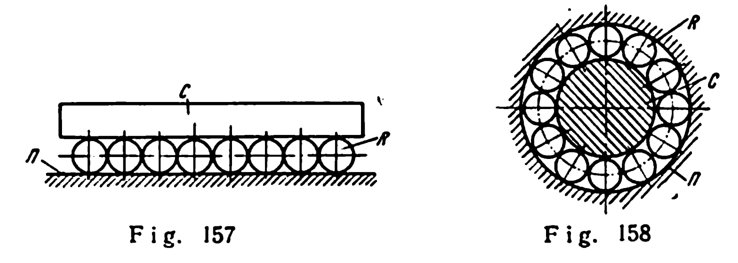


Fig. 157 Fig. 158

ou à rouleaux) et les pièces sur les surfaces desquelles se produit le roulement sont durs, alors pour cette raison-là et pour certaines autres considérations, les paliers à roulement sont fabriqués en matériaux durs sous forme de deux anneaux avec des billes ou des rouleaux disposés entre eux. Pour que les distances entre les

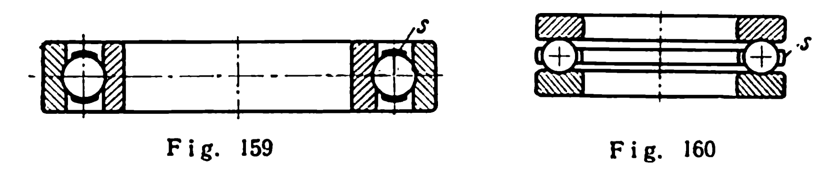


Fig. 159 Fig. 160

corps qui roulent pendant le roulement sur les surfaces des anneaux restent constantes, dans les roulements modernes, les corps

qui roulent sont séparés les uns des autres à l'aide de pièces particulières appelées séparateurs.

En U.R.S.S., les paliers à roulement sont fabriqués dans de grandes usines mécanisées et font l'objet de la production en série. Les multiples types de constructions et de dimensions des paliers à roulement sont standardisés.

On a représenté sur la fig. 159 un des types de constructions standard de roulement radial, c'est-à-dire de roulement destiné à recevoir les efforts radiaux; ces roulements peuvent supporter aussi des efforts axiaux approximativement 1,5 fois moindres que les efforts radiaux. On donne sur la fig. 160 une des constructions standard d'un roulement à butée, c'est-à-dire d'un roulement destiné à supporter des efforts axiaux; ces roulements sont inutilisables pour les efforts radiaux. La lettre S sur les fig. 159 et 160 indique les cages.

Le coefficient de frottement de roulement dans les paliers à roulement est une grandeur de l'ordre d'un micron.

Exemple 1. Une tige qui glisse sur les glissières A et B (fig. 161) distantes l'une de l'autre de l, se trouve sous l'action d'une force P distante de l de la glissière A et faisant un angle α avec l'axe de la tige. Le coefficient de frottement au repos entre la tige et les glissières est $f_0 = 0{,}2$. Déterminer

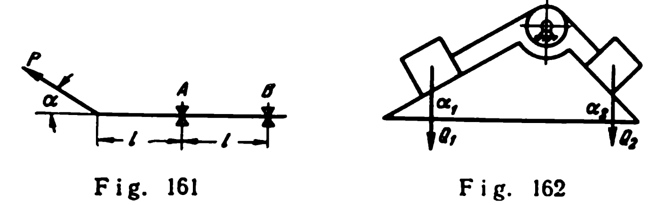


Fig. 161 Fig. 162

le plus grand angle α pour lequel le mouvement de la tige sur les glissières est possible.

Décomposons la force P en forces $P\cos\alpha$ et $P\sin\alpha$. La première de ces forces est une force mobile, la seconde une force freinant le mouvement qui crée dans les glissières les pressions P_A et P_B perpendiculaires à l'axe de la tige, engendrant les forces de frottement qui s'opposent à la force $P\cos\alpha$.

Des équations des moments par rapport à B, puis par rapport à A, on trouve que la glissière A exerce une pression sur la tige avec la force $P_A = 2P\sin\alpha$ orientée sur la fig. 161 de haut en bas et la glissière B avec la force $P_B = P\sin\alpha$ orientée de bas en haut. Les deux forces P_A et P_B engendrent une force de frottement générale dans les glissières égale à $3fP\sin\alpha$ et s'opposant à la force $P\cos\alpha$. Pour que le mouvement puisse avoir lieu, il faut que la condition

$$P\cos\alpha > 3f_0P\sin\alpha$$

soit vérifiée, d'où

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{3f_0} = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}67\,;$$

$$\alpha < 59°.$$

Exemple 2. Une charge $Q_1 = 10$ kg (fig. 162) placée sur un plan incliné faisant l'angle $\alpha_1 = 30°$ avec l'horizontale est retenue par un fil souple qui passe par une poulie et au bout duquel est fixée la charge Q_2 posée sur un plan incliné faisant avec l'horizontale l'angle $\alpha_2 = 45°$. En négligeant la rigidité du fil et la résistance au frottement dans l'appui de la poulie, déterminer la valeur de la charge Q_2 pour laquelle les deux charges seront immobiles. Le coefficient de frottement au repos f_0 entre les charges et les plans inclinés est 0,2.

Décomposons le poids Q de chaque charge en force $Q \sin\alpha$ dirigée parallèlement au plan incliné de haut en bas et en $Q \cos\alpha$ dirigée perpendiculairement au plan incliné.

Pour que la charge Q_1 ne se déplace pas vers le bas et n'entraîne pas la charge Q_2 sur le plan dans un mouvement ascensionnel, il faut que la condition

$$Q_1 \sin\alpha_1 - Q_1 f_0 \cos\alpha_1 \leqslant Q_2 \sin\alpha_2 + Q_2 f_0 \cos\alpha_2$$

soit vérifiée, d'où

$$Q_2 \geqslant Q_1 \frac{\sin\alpha_1 - f_0 \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 + f_0 \cos\alpha_2}$$

Pour que la charge Q_2 ne se déplace pas vers le bas sur le plan en entraînant la charge Q_1, il faut que la condition

$$Q_2 \sin\alpha_2 - Q_2 f_0 \cos\alpha_2 \leqslant Q_1 \sin\alpha_1 + Q_1 f_0 \cos\alpha_1$$

soit vérifiée, d'où

$$Q_2 \leqslant Q_1 \frac{\sin\alpha_1 + f_0 \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 - f_0 \cos\alpha_2}.$$

Par conséquent, la valeur de la charge Q_2 doit rester entre les limites

$$Q_1 \frac{\sin\alpha_1 + f_0 \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 - f_0 \cos\alpha_2} \geqslant Q_2 \geqslant Q_1 \frac{\sin\alpha_1 - f_0 \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 + f_0 \cos\alpha_2}.$$

On a en remplaçant les grandeurs par leurs valeurs numériques données et en effectuant les calculs :

$$11{,}89 \text{ kg} \geqslant Q_2 \geqslant 3{,}86 \text{ kg}.$$

Exemple 3. Un coin trapézoïdal d'un poids de 100 kg se déplace entre des glissières horizontales (fig. 163). L'angle aigu du coin est $2\gamma = 60°$. Le coefficient de frottement de glissement entre le point et les glissières est

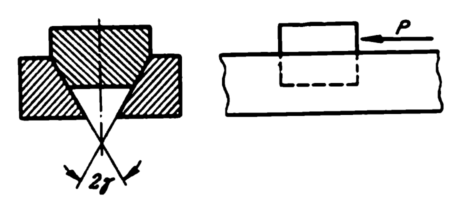


Fig. 163

$f = 0{,}2$. Déterminer la valeur de la force mobile P dirigée parallèlement aux glissières, pendant le mouvement du coin avec une vitesse constante et une accélération de 4,9 m/s^2.

Le coefficient fictif de frottement est

$$f' = \frac{f}{\sin \gamma} = \frac{f}{\sin 30^\circ} = 2f = 0,4.$$

La force de frottement est

$$F = 100 \text{ kg} \cdot 0,4 = 40 \text{ kg}.$$

La force nécessaire pour avoir un mouvement avec une vitesse constante est

$$P = F = 40 \text{ kg}.$$

La masse du coin est

$$m = \frac{100}{9,8} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}.$$

La force nécessaire pour que le mouvement du coin ait une accélération de 4,9 m/s^2 est

$$P = F + 4,9 \text{ m} = 40 + 4,9 \frac{100}{9,8} = 90 \text{ kg}.$$

Exemple 4. Une roue menante à friction de diamètre $D_1 = 300$ mm (fig. 164) et à $n_1 = 300$ tours à la minute transmet la puissance $N = 4$ cv à une roue menée de diamètre $D_2 = 450$ mm. Le coefficient de frottement au

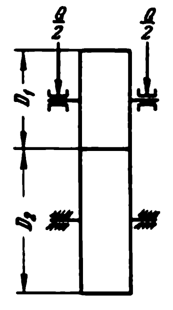


Fig. 164

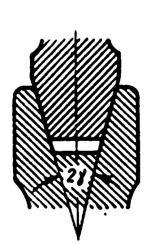


Fig. 165

point de contact des jantes des roues est $f = 0,2$. Les arbres sur lesquels sont montées les roues sont en rotation dans des paliers de 40 mm de diamètre. Le coefficient de frottement aux supports des arbres est $f_1 = 0,08$. Déterminer la perte d'énergie due au frottement dans les supports des arbres pour des roues à jantes cylindriques et des roues à jantes trapézoïdales.

L'angle aigu de la jante trapézoïdale est $2\gamma = 30^\circ$ (fig. 165).

La vitesse angulaire de la roue menante est

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ s}^{-1}.$$

Pour la puissance $N = 4$ ch $= 4 \cdot 75$ kgm/s $= 300$ kgm/s, le moment sur l'arbre de la roue menante est

$$M = 300 \text{ kgm/s} : 31,4 \text{ s}^{-1} = 9,55 \text{ kgm}.$$

L'effort périphérique est

$$P=9,55 \text{ kgm}:\frac{0,3 \text{ m}}{2}=63,7\approx 64 \text{ kg}.$$

La force avec laquelle les roues doivent être appliquées l'une contre l'autre dans le cas des jantes cylindriques est

$$Q=\frac{P}{f}=\frac{64 \text{ kg}}{0,2}=320 \text{ kg}.$$

La force S enregistrée aux supports de chaque arbre est la somme géométrique de deux termes: l'effort périphérique et la force Q. Puisque les lignes d'action de ces forces sont réciproquement perpendiculaires, alors

$$S=\sqrt{P^2+Q_2}=\sqrt{64^2+320^2}=326 \text{ kg}.$$

La force de frottement dans les supports pour chaque arbre est

$$Sf=326 \text{ kg}\cdot 0,08=26 \text{ kg}.$$

Le moment de la force de frottement dans les supports de chaque arbre est

$$26 \text{ kg}\cdot\frac{40}{2} \text{ mm}=520 \text{ kgmm}=0,52 \text{ kgm}.$$

La vitesse angulaire de l'arbre menant est

$$\omega_2=\omega_1\frac{D_1}{D_2}=31,4\cdot\frac{300}{450}=20,9 \text{ s}^{-1}.$$

La perte d'énergie due au frottement dans les supports est: pour l'arbre menant

$$0,52 \text{ kgm}\cdot 31,4 \text{ s}^{-1}=16,3 \text{ kgm/s};$$

pour l'arbre mené

$$0,52 \text{ kgm}\cdot 20,9 \text{ s}^{-1}=10,9 \text{ kgm/s}.$$

Le coefficient de frottement fictif dans le cas de roues à jantes trapézoïdales est

$$f'=\frac{f}{\sin\gamma}=\frac{f}{\sin 15^\circ}=3,84f=3,84\cdot 0,2\approx 0,77.$$

Pour ce coefficient de frottement la force de pression nécessaire est

$$Q=\frac{P}{f'}=\frac{64}{0,77}=83,5\approx 84 \text{ kg}.$$

La force enregistrée dans les supports des arbres est

$$S=\sqrt{64^2+84^2}=106 \text{ kg}.$$

La perte de l'énergie due au frottement dans les supports de l'arbre est proportionnelle à la force S, alors dans le cas des jantes trapézoïdales, la perte d'énergie dans les supports des arbres sera inférieure de $326:106\approx 3$ fois par rapport aux jantes cylindriques.

R e m a r q u e. Malgré l'avantage des roues à friction à jantes trapézoïdales par rapport aux roues à jantes cylindriques, découlant des calculs de comparaison donnés ci-dessus, la transmission par friction à roues trapézoïdales est largement appliquée seulement dans les appareils qui transmettent de petites puissances et rarement dans les transmissions à puissance élevée,

car l'usure relative au glissement dans les jantes trapézoïdales ne peut être supprimée: seuls les points de contact des surfaces des jantes appartenant aux cercles primitifs ne glissent pas l'un par rapport à l'autre.

Exemple 5. Les pièces A et B (fig. 166) sont assemblées par un boulon. Le diamètre de l'orifice pour le boulon est légèrement (de 1 à 2 mm) supérieur au diamètre du boulon. Le diamètre extérieur du filet du boulon est $d=20$ mm, le diamètre moyen du filet est $d_{moy}=18{,}4$ mm, le pas du filet est $s=2{,}5$ mm, l'angle au sommet du profil du filet est $2\beta=60°$. Le boulon est serré à l'aide d'une clé avec la force $P_0=20$ kg appliquée au manche de la clé à la distance $l=250$ mm de l'axe du boulon. Le coefficient de frottement de glissement sur toutes les surfaces de frottement est $f=0{,}2$, le coefficient de frottement au repos est $f_0=0{,}25$. La résultante générale des forces de frottement élémentaires sur la surface de contact de l'écrou et de la pièce A est supposée appliquée sur la circonférence de diamètre $D=30$ mm.

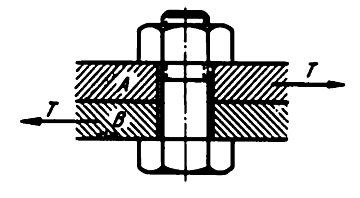


Fig. 166

Déterminer 1) avec quelle force T dirigée perpendiculairement à l'axe du boulon on peut déplacer les pièces A et B l'une par rapport à l'autre et 2) quelle force faut-il appliquer sur la clé en un point distant de l de l'axe du boulon pendant le démontage de l'assemblage.

Le déplacement des pièces A et B, l'une par rapport à l'autre, est gêné par la force de frottement de leurs surfaces de contact. La force de frottement qui s'oppose au déplacement est Qf_0 où Q est la force qui applique les pièces qui se trouvent entre l'écrou et la tête du boulon. En produisant une pression sur la pièce A, l'écrou serré avec une force égale à cette pression mais dirigée en sens inverse desserre le boulon.

Le boulon est serré avec un moment $M=20$ kg·250 mm $=5\,000$ kgmm. A la fin du serrage, ce moment s'équilibre 1) avec le moment $P\cdot r$, où P est la force sur le rayon moyen du filet hélicoïdal et r — le rayon moyen du filet et 2) avec le moment QfR de la force de frottement sur la surface de frottement de l'écrou et de la pièce A, où R est le rayon moyen sur lequel agit la résultante générale des forces élémentaires de frottement.

Par conséquent,

$$5\,000=Pr+QfR=P\,\frac{18{,}4}{2}=Q\cdot 0{,}2\,\frac{30}{2}$$

$$5\,000=9{,}2P+3Q.$$

Puisque

$$P=Q\,\operatorname{tg}(\lambda+\varphi'),$$

alors

$$5\,000=Q\,[9{,}2\,\operatorname{tg}(\lambda+\varphi')+3].$$

Pour le pas $s=2{,}5$ mm et le diamètre moyen du filet $d_{moy}=18{,}4$ on a

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{2{,}5}{\pi\cdot 18{,}4}\approx 0{,}043$$

d'où

$$\lambda=2°30'.$$

Pour $f=0{,}2$ et pour l'angle $2\beta=60°$ au sommet du profil du filet, le coefficient de frottement fictif est

$$f'=\frac{f}{\cos\beta}=\frac{0{,}2}{0{,}866}=0{,}23$$

et l'angle de frottement fictif correspondant est

$$\varphi' = \text{arc tg } 0{,}23 = 13°00'.$$

Par conséquent,

$$\text{tg}(\lambda + \varphi') = \text{tg}(2°30' + 13°) = 0{,}277;$$
$$5\,000 = Q\,(9{,}2 \cdot 0{,}277 + 3) = 5{,}55Q,$$

d'où

$$Q = 5\,000 : 5{,}55 = 900 \text{ kg}.$$

Pour $f_0 = 0{,}25$, la force T est

$$T = Qf_0 = 900 \cdot 0{,}25 = 225 \text{ kg}.$$

Pendant le démontage de l'assemblage, la force P_0 appliquée à la clé pour dévisser l'écrou à la distance $l = 250$ mm de l'axe du boulon engendre le moment $P_0'l$ qui surmonte la résistance 1) du moment $P'r$, où P' est la force sur le rayon moyen r du filet et 2) du moment QfR sur la surface de contact de l'écrou et de la pièce A.

D'après la formule (10)

$$P' = Q\,\text{tg}(\varphi_0' - \lambda),$$

où φ_0', l'angle de frottement fictif au repos, est égal à

$$\varphi_0' \text{ arc tg } f_0' = \text{arc tg } \frac{f_0}{\cos\beta} = \text{arc tg } \frac{0{,}25}{0{,}866} = 16°10'.$$

La valeur de la force P' est

$$P' = 900 \text{ tg}(16°10' - 2°30') = 218{,}7 \approx 219 \text{ kg}.$$

Par conséquent,

$$P_0'l = P'r + Qf_0R, \text{ c'est-à-dire}$$
$$P_0' \cdot 250 = 219 \cdot 9{,}2 + 900 \cdot 0{,}25 \cdot 15 = 5\,390 \text{ kgmm},$$

d'où

$$P_0' = 5390 : 250 \approx 21{,}6 \text{ kg}.$$

Exemple 6. Déterminer la force avec laquelle il faut agir sur le levier d'un cric à la distance de 800 mm de l'axe de sa vis (fig. 167) pour soulever une charge pesant 2 000 kg avec une vitesse constante, d'après les données suivantes :

1) le filet de la vis est trapézoïdal dont l'angle au sommet du profil est $2\beta = 30°$, le diamètre extérieur $d = 50$ mm, le diamètre moyen $d_{moy} = 46$ mm, le pas $s = 8$ mm ;

2) le coefficient de frottement entre la vis et l'écrou est $f = 0{,}12$;

3) le coefficient de frottement entre la tête de la vis et la tête du cric qui ne tourne pas est $f_1 = 0{,}2$;

4) les diamètres de l'anneau en contact des têtes de la vis et du cric sont : diamètre extérieur $D = 80$ mm, diamètre intérieur $D_1 = 40$ mm.

L'angle d'inclinaison λ de l'hélice sur le diamètre moyen est

$$\text{tg}\,\lambda = \frac{s}{\pi d_{moy}} = \frac{8}{\pi \cdot 46} \approx 0{,}055;$$
$$\lambda = 3°10'.$$

Le coefficient fictif de frottement entre la vis et l'écrou est

$$f' = \frac{f}{\cos\beta} = \frac{0{,}12}{\cos 15°} = 0{,}124.$$

L'angle fictif de frottement est

$$\varphi' = \text{arc tg}\, f' = \text{arc tg}\, 0{,}124 = 7°05'.$$

La force P' qu'il faut appliquer sur le rayon moyen du filet hélicoïdal pour surmonter le poids de la charge Q et les forces de frottement du filet est

$$P' = Q\ \text{tg}\,(\lambda + \varphi') = 2\,000\ \text{tg}\,(3°10' + 7°05') = 360\ \text{kg}.$$

Le moment M' de la force P' est

$$M' = P'\,\frac{d_{moy}}{2} = 360\ \text{kg}\cdot\frac{4{,}6}{2}\ \text{cm} = 828\ \text{kgcm}.$$

La force de frottement F entre les têtes de la vis et du cric est

$$F = f_1\cdot Q = 0{,}2\cdot 2\,000 = 400\ \text{kg}$$

(le poids insignifiant de la tête n'est pas pris en considération). Le bras de levier L de la résultante générale des forces élémentaires de frottement est

$$L = \frac{2}{3}\cdot\frac{D^2 + DD_1 + D_1^2}{2\,(D + D_1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{8^2 + 8\cdot 4 + 4^2}{2\,(8+4)} = 3{,}1\ \text{cm}.$$

Le moment M'' de la force F est

$$M'' = 400\ \text{kg}\cdot 3{,}1\ \text{cm} = 1\,240\ \text{kgcm}.$$

Le moment M nécessaire pour soulever la charge avec une vitesse constante est :

$$M = M' + M'' = 828 + 1\,240 = 2\,068\ \text{kgcm}.$$

La force P_0 qu'il faut appliquer au levier du cric est :

$$P_0 = M : l = 2\,068 : 80 = 25{,}85 \approx 26\ \text{kg}.$$

Exemple 7. Un arbre vertical B (fig. 168), se trouvant sous l'action de la force $Q = 400$ kg, s'appuie, par l'intermédiaire d'une crapaudine П circulaire

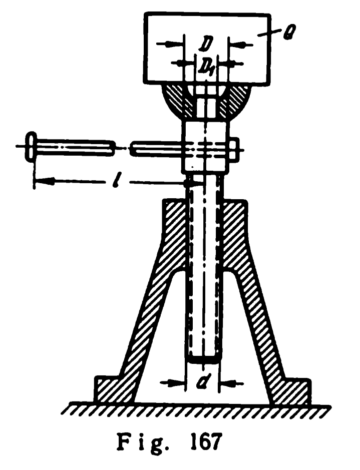


Fig. 167

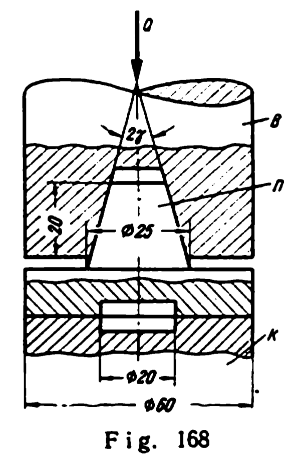


Fig. 168

montée sur l'arbre, sur un matelas K fixe du support de la crapaudine. La crapaudine est montée dans un arbre conique dont l'angle au sommet du cône

est $2\gamma=30°$. Le nombre de tours par minute de l'arbre est $n=300$. Le coefficient de frottement au repos à la surface de contact de la crapaudine et de l'arbre est $f_0=0{,}2$; le coefficient de frottement de glissement entre la crapaudine et le matelas est $f=0{,}08$. Les dimensions de la surface de contact sont indiquées sur la fig. 168. Déterminer la perte d'énergie due au frottement et expliquer s'il est possible que la rotation de l'arbre mette en rotation la crapaudine par rapport à l'arbre.

La force de frottement à la surface de contact de la crapaudine et du matelas est

$$Qf=400\cdot 0{,}08=32 \text{ kg}.$$

Le bras de levier R de la force de frottement est :

$$R=\frac{2}{3}\cdot\frac{30^2+30\cdot 10+10^2}{30+10}=21{,}7\approx 22 \text{ mm}.$$

Le moment angulaire de frottement est :

$$M_f=32 \text{ kg}\cdot 22 \text{ mm}=704 \text{ kgmm}\approx 0{,}7 \text{ kgm}.$$

La vitesse angulaire de l'arbre est

$$\omega=\frac{\pi\cdot n}{30}=\frac{\pi\cdot 300}{30}=31{,}4 \text{ s}^{-1}.$$

La perte de puissance due au frottement est

$$M_f\cdot\omega=0{,}7 \text{ kgm}\cdot 31{,}4 \text{ s}^{-1}=21{,}98\approx 22 \text{ kgm/s}.$$

Le coefficient de frottement fictif au repos sur la surface de contact de la crapaudine et de l'arbre est :

$$f_0'=f_0:\sin\gamma=0{,}2:\sin 15°\approx 0{,}77.$$

La force de frottement sur la surface de contact de la crapaudine et de l'arbre est

$$Qf_0'=400 \text{ kg}\cdot 0{,}77=308 \text{ g}.$$

Pour une distribution uniforme des forces élémentaires de frottement suivant la hauteur de la surface de contact de la crapaudine et de l'arbre (ce qu'on peut supposer dans le cas où les surfaces des cônes tronqués pleins et vides sont usinées avec suffisamment de précision) on peut supposer que la résultante générale des forces élémentaires de frottement est appliquée à une distance égale de la grande et de la petite base de la surface conique de contact, c'est-à-dire si la hauteur de cette surface est égale à 20 mm pour une distance de 10 mm de la base inférieure.

Le rayon des circonférences de la base inférieure est $25:2=12{,}5$ mm ; à la hauteur de 10 mm de la base inférieure le rayon de la section transversale est :

$$12{,}5-10 \operatorname{tg} 15°=9{,}9 \text{ mm}.$$

Le moment nécessaire pour que la crapaudine tourne par rapport à l'arbre est :

$$308 \text{ kg}\cdot 9{,}9 \text{ mm}=2999 \text{ kgmm}\approx 3 \text{ kgm},$$

et est supérieur de $3:0{,}7=4{,}3$ fois au moment $M_f=0{,}7$ kgm des forces de frottement sur la surface de contact de la crapaudine et du matelas. Par conséquent, la possibilité de rotation de la crapaudine par rapport à l'arbre est exclue.

Exemple 8. Un corps flexible enveloppe trois cylindres fixes comme l'indique la fig. 169. On a suspendu à l'une des extrémités du corps flexible la charge $Q_1 = 100$ kg. Déterminer la valeur de la charge Q_2 suspendue à l'autre extrémité du corps flexible pour que les deux charges soient immobiles. Le coefficient de frottement entre le corps flexible et les cylindres est $f = 0,32$.

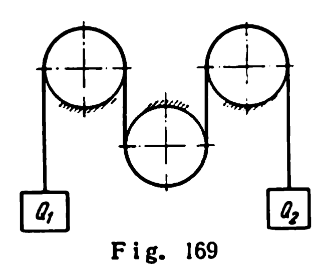


Fig. 169

L'angle total d'enroulement du corps flexible avec tous les cylindres est égal à 3π. En prenant l'exposant dans la formule d'Euler égal à $f_\alpha = 0,32 \cdot 3\pi \approx 3$, on obtient la condition pour que le mouvement vers le bas soit impossible

$$\text{charge } Q_1 \leqslant Q_2 e^3;$$
$$\text{» } \quad Q_2 \leqslant Q_1 e^3.$$

Par conséquent, la valeur de la charge Q_2 doit se trouver entre les limites

$$\frac{Q_1}{e^3} \leqslant Q_2 \leqslant Q_1 e^3.$$

En prenant $e^3 = 2,72^3 \approx 20$, on trouve $5 \text{ kg} \leqslant Q_2 \leqslant 2\,000$ kg.

CHAPITRE VIII

MOUVEMENT ET TRAVAIL DES MACHINES

35. COEFFICIENT DE RENDEMENT

L'énergie consommée par une machine est dépensée pour vaincre les résistances utiles et nuisibles. Les résistances surmontées par des machines qui sont destinées à cet effet s'appellent résistances utiles ; par exemple, la résistance d'un métal au cisaillement dans les machines, le poids d'une charge élevée par des appareils de levage, etc. Les résistances qui doivent être surmontées par une dépense d'énergie ne produisant aucun effet productif s'appellent résistances nuisibles ; par exemple, la résistance du milieu dans lequel s'effectue le mouvement des pièces d'une machine (si la machine n'est pas destinée à mettre le milieu en mouvement), les forces de frottement.

La machine est d'autant plus perfectionnée que la quantité consommée d'énergie, dépensée pour vaincre les résistances utiles, est plus grande. Le degré de perfectionnement de la machine est caractérisé par la relation

$$\eta = \frac{A_{ru}}{A_m},$$

où A_{ru} est le travail dépensé par la machine pour vaincre les résistances utiles ;

A_m le travail des forces motrices ou l'énergie consommée par la machine ;

η le coefficient de rendement (c. r.).

A l'aide du coefficient de rendement on peut non seulement évaluer le degré de perfectionnement de la machine, c'est-à-dire d'une construction mécanique, plus au moins complexe, mais aussi de toute autre installation mécanique simple, qui ne soit pas une machine capable d'emmagasiner ou de communiquer l'énergie, par exemple, la chauffe d'une chaudière à vapeur, dans laquelle l'énergie chimique du combustible se transforme en énergie calo-

rifique, le conduit à vapeur servant à transporter l'énergie d'un bout à l'autre, le plan incliné, etc.

Pendant l'étude d'une machine ou d'une installation complexe composée de plusieurs machines ou de différentes autres parties dans lesquelles ont lieu des pertes d'énergie, il est toujours utile non seulement de définir le coefficient de rendement de la machine ou de l'installation tout entière, mais aussi les coefficients de rendement de différentes parties. Par exemple, pour une installation, destinée à assurer l'éclairage de locaux et composée d'une station électrique, d'un réseau de fils électriques et de lampes à incandescence, non seulement le coefficient de rendement de l'installation entière est d'un grand intérêt, mais aussi, séparément, les coefficients de rendement du moteur, du mécanisme qui transmet le mouvement de rotation du moteur au générateur d'énergie électrique, du générateur d'énergie électrique, du réseau des fils électriques véhiculant l'énergie de la station aux points de consommation et finalement les lampes à incandescence transformant l'énergie électrique en énergie lumineuse.

Dans tous ces cas, quand l'énergie est véhiculée jusqu'à une partie de la machine ou une installation complexe, puis est successivement transmise d'une partie à l'autre et enfin sous une forme utilisable en pratique, à la dernière partie, alors le coefficient de rendement de la machine ou de l'installation est globalement égal au produit des coefficients de rendement de différentes parties. On peut s'en convaincre facilement de la manière suivante.

Si une installation est composée de n parties agissant de manière que l'énergie soit transmise de chaque partie à la partie suivante et si $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ sont les coefficients de rendement de différentes parties, alors la première partie de l'installation exige le travail A_m nécessaire à toute l'installation et la dernière, pour vaincre les résistances utiles, dépense le travail A_{ru} dépensé par toute l'installation.

En désignant par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ le travail effectué par les différentes parties de l'installation on a

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_m}, \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}, \quad \ldots, \quad \eta_n = \frac{A_{ru}}{A_{n-1}}.$$

En multipliant les premiers membres et les seconds membres entre eux, on a après simplification

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n = \frac{A_{ru}}{A_m} = \eta,$$

où η est le coefficient de rendement de l'installation entière.

Les pertes d'énergie mécanique, dans différents genres d'installations, sont principalement dues au frottement. Montrons dans des cas simples, l'influence des forces de frottement sur la valeur du coefficient de rendement.

A. Coefficient de rendement d'un plan incliné

Si un corps de poids Q (fig. 170) est animé d'un mouvement ascensionnel sur un plan incliné d'angle λ avec l'horizontale, sous l'action d'une force P dirigée parallèlement au plan incliné, alors le travail de la force motrice est égal à Ps, et la force utile engendrée par la force P est égale à Qh, où s est le chemin parcouru par la force P dans le sens du mouvement et h la hauteur d'ascension du corps. D'où

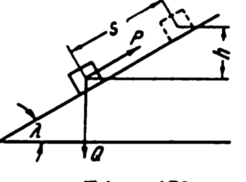


Fig. 170

$$\eta_{ru} = \frac{Qh}{Ps}.$$

En déplaçant le corps, la force P doit surmonter la résistance de deux forces: la composante $Q \sin \lambda$ de la force Q dans la direction parallèle au plan incliné et la force de frottement $fQ \cos \lambda$ de la composante excitatrice $Q \cos \lambda$ de la force Q dans la direction perpendiculaire au plan incliné. Donc,

$$P = Q \sin \lambda + fQ \cos \lambda,$$

mais comme $h = s \sin \lambda$, alors

$$\eta_{ru} = \frac{Qh}{Ps} = \frac{Qs \sin \lambda}{Qs (\sin \lambda + f \cos \lambda)} = \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda + f \cos \lambda}.$$

En remplaçant le coefficient de frottement par la tangente de l'angle de frottement on trouve, pendant le mouvement ascensionnel sur le plan incliné, pour le coefficient de rendement

$$\eta_{ru} = \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda + \operatorname{tg} \varphi \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sin (\lambda + \varphi)}.$$

Pendant le mouvement du corps vers le bas, la force motrice n'est autre que la force Q qui s'oppose à la force P. Donc, le coefficient de rendement pendant le mouvement vers le bas est

$$\eta_{ru} = \frac{Ps}{Qh}.$$

Dans ce cas $P = Q \sin \lambda - fQ \cos \lambda$. En prenant ceci en considération et en substituant h par $s \sin \lambda$ et f par $\operatorname{tg} \varphi$ on a

$$\eta_{ru} = \frac{\sin \lambda - f \cos \lambda}{\sin \lambda} = \frac{\sin (\lambda - \varphi)}{\sin \lambda \cos \varphi}.$$

Sur le plan d'autofreinage, pendant le mouvement vers le bas, on a à la limite $\lambda = \varphi$, donc $\eta_{ru} = 0$, ce à quoi il fallait s'attendre.

Sur le plan d'autofreinage, pendant le mouvement ascensionnel pour $\lambda = \varphi$, c'est-à-dire dans le meilleur des cas

$$\eta_{ru} = \frac{\sin\lambda\cos\lambda}{\sin 2\lambda} = 0{,}5.$$

Pendant le mouvement ascensionnel d'une charge sur un plan incliné, le plan d'autofreinage a un rôle très utile puisque pendant les interruptions entre les actions de la force mobile on n'a besoin d'aucun dispositif pour retenir la charge sur le plan incliné. Cependant, comme le prouve le résultat qu'on vient d'obtenir, cette propriété du plan d'autofreinage est vouée à trop d'effort. Cette remarque concerne aussi toutes sortes d'appareils de levage manuel avec commande d'autofreinage (par exemple, vis sans fin).

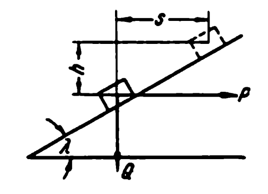


Fig. 171

Pendant le mouvement ascensionnel d'une charge sur un plan incliné, la direction la plus avantageuse de la force motrice est celle qui est parallèle au plan incliné. Ayant en vue le coefficient de rendement de la vis et en considérant le plan incliné comme le développement d'une surface hélicoïdale, nous devons (voir page 118) diriger la force P parallèlement à l'horizontale (fig. 171).

Dans ce cas, on a pour le mouvement ascensionnel

$$\eta_{ru} = \frac{Qh}{Ps};$$

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,(\lambda + \varphi);\quad h = s\,\mathrm{tg}\,\lambda;$$

$$\eta_{ru} = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda}{\mathrm{tg}\,(\lambda + \varphi)}$$

et pour le mouvement vers le bas

$$\eta_{ru} = \frac{Ps}{Qh};$$

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,(\lambda - \varphi);\quad h = s\,\mathrm{tg}\,\lambda;$$

$$\eta_{ru} = \frac{\mathrm{tg}\,(\lambda - \varphi)}{\mathrm{tg}\,\lambda}.$$

Pour $\lambda = \varphi$ (début de l'autofreinage)

$$\eta_{ru} = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda}{\mathrm{tg}\,2\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\lambda,$$

c'est-à-dire le coefficient de rendement de la surface hélicoïdale est constamment inférieure à 0,5.

Déterminons la valeur maximale du coefficient de rendement pour un angle de frottement donné.

En différentiant l'équation

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}(\lambda+\varphi)},$$

on trouve

$$d\eta = \frac{\operatorname{tg}(\lambda+\varphi)\, d\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda\, d\operatorname{tg}(\lambda+\varphi)}{\operatorname{tg}^2(\lambda+\varphi)} = \frac{\operatorname{tg}(\lambda+\varphi)\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} - \operatorname{tg}\lambda\frac{d\lambda}{\cos^2(\lambda+\varphi)}}{\operatorname{tg}^2(\lambda+\varphi)}$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{\frac{\operatorname{tg}(\lambda+\varphi)}{\cos^2\lambda} - \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\cos^2(\lambda+\varphi)}}{\operatorname{tg}^2(\lambda+\varphi)} = \frac{\operatorname{ctg}(\lambda+\varphi)}{\cos^2\lambda} - \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin^2(\lambda+\varphi)};$$

on trouve en annulant la dérivée

$$\frac{\operatorname{ctg}(\lambda+\varphi)}{\cos^2\lambda} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin^2(\lambda+\varphi)}.$$

On a en résolvant cette équation

$$\sin 2(\lambda+\varphi) = \sin 2\lambda;$$
$$\sin 2(\lambda+\varphi) = \sin(180° - 2\lambda);$$
$$2(\lambda+\varphi) = 180° - 2\lambda;$$
$$\lambda = 45° - \frac{\varphi}{2}.$$

En substituant cette valeur de λ dans l'équation initiale on a

$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left[90° - \left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right]} = \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right).$$

L'angle λ de l'inclinaison de l'hélice pour lequel le coefficient de rendement est maximum dans les vis qui transmettent le mouvement, ne convient pas vu certaines considérations exposées dans le cours de pièces de machines; c'est pourquoi dans la transmission à engrenage à vis sans fin, l'angle λ doit être pris le plus petit possible. Cependant cela n'entraîne pas une diminution sensible du coefficient de rendement par rapport à la valeur maximale possible. Si les engrenages de la roue à vis sans fin sont lubrifiés correctement, ce qui d'ailleurs est toujours assuré dans les transmissions rapides, le coefficient de rendement de l'engrenage varie entre les limites 0,02÷0,04; si on prend $f = 0{,}03$ et, par conséquent, l'angle de frottement $\varphi = 1°34'$, alors

pour différents λ les valeurs du coefficient de rendement défini par l'équation

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \lambda (\lambda + \varphi)},$$

sont les suivantes

$\lambda =$	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\eta =$	0,914	0,927	0,934	0,939	0,941	0,942

On voit, d'après ces données, que, même pour une forte variation de l'angle λ, le coefficient de rendement de l'engrenage diminue très peu.

B. Coefficient de rendement des mécanismes articulés

La détermination du coefficient de rendement d'un mécanisme articulé se ramène au calcul des puissances dépensées pour vaincre la force de frottement dans les articulations (couples de rotation).

Si la réaction dans une articulation est égale à Q, alors la force de frottement est égale à $F = fQ$ et le moment de la force de frottement pour un tourillon de diamètre d est égal à

$$M_f = fQ\frac{d}{2}.$$

Si la vitesse angulaire d'un des chaînons appartenant au couple de rotation par rapport à un autre est égale à ω_{rel} alors la puissance de la force de frottement est

$$N_f = M_f \omega_{rel}.$$

Par conséquent, pour déterminer la puissance dissipée dans l'articulation par la force de frottement, il faut connaître la réaction en cette articulation, le coefficient de frottement, le diamètre du tourillon et la vitesse angulaire relative.

La détermination des réactions dans les articulations se fait à l'aide du calcul cinématico-statique du mécanisme. Les vitesses relatives peuvent être déterminées d'après le plan des vitesses.

On a donné, sur la fig. 172 *a*, le schéma d'un mécanisme articulé à quatre chaînons et sur la fig. 172 *b*, le plan des vitesses correspondant à ce mécanisme.

On a à l'articulation A

$$\omega_1 = \frac{pb\mu_v}{l_1}$$

où ω_1 est la vitesse angulaire du chaînon AB;
l_1 la longueur du chaînon AB;
μ_v l'échelle du plan des vitesses.

En passant à l'articulation B et en utilisant le plan des vitesses on peut établir que:

1) la direction du vecteur $\overrightarrow{ba}$ indique que le point A et, par conséquent, tout le chaînon AB par rapport au point B, est en rotation (pour l'instant correspondant à la position des chaînons représentée sur la fig. 172) dans le sens des aiguilles d'une montre;

2) le point C du chaînon BC et, par conséquent, le chaînon BC entier par rapport au point B est en rotation dans le sens indiqué par le vecteur $\overrightarrow{bc}$, c'est-à-dire en sens inverse des aiguilles d'une montre.

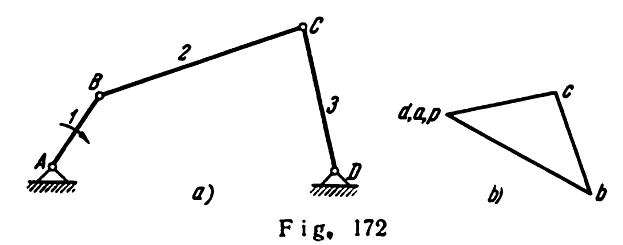


Fig. 172

Par conséquent, l'élément du couple cinématique B, rigidement lié au chaînon AB, est en mouvement de rotation par rapport à un autre élément du même couple rigidement lié au chaînon BC avec une vitesse angulaire ω_b égale à la somme des vitesses angulaires des chaînons AB et BC, c'est-à-dire

$$\omega_b = \omega_1 + \omega_2 = \left(\frac{ba}{l_1} + \frac{bd}{l_2}\right)\mu_v,$$

où ω_1 et ω_2 sont respectivement les vitesses angulaires des chaînons AB et BC;

l_2 la longueur du chaînon BC.

Le point B est en rotation par rapport au point C dans le sens du vecteur $\overrightarrow{cb}$, par conséquent, le chaînon BC est en rotation par rapport au point C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le point D, par rapport au point C, est en rotation dans le sens du vecteur $\overrightarrow{cd}$, par conséquent, le chaînon CD est en rotation, par rapport au point C, dans le sens des aiguilles d'une montre. Donc, l'élément du couple cinématique C, rigidement lié au chaînon BC par rapport à un autre élément lui aussi rigidement lié au chaînon CD, est en rotation avec une vitesse angulaire ω_c égale à la somme des vitesses angulaires des chaînons BC et CD, c'est-à-dire

$$\omega_c = \omega_2 + \omega_3 = \left(\frac{cb}{l_2} + \frac{cd}{l_3}\right)\mu_v,$$

où ω_3 est la vitesse angulaire du chaînon CD;

l_3 la longueur du chaînon CD.

Étant donné que le chaînon AB est fixe, l'élément cinématique du couple D, lié au chaînon CD par rapport à l'élément lié au chaînon AD, est en rotation avec une vitesse angulaire ω_d égale à la vitesse angulaire du chaînon CD, c'est-à-dire

$$\omega_d = \omega_3 = \frac{cd}{l_3} \mu_v.$$

Après avoir déterminé, comme on l'a indiqué plus haut, la puissance dépensée pour vaincre la force de frottement dans les articulations pour différentes positions du mécanisme, on peut construire par points la courbe $N_f = f(\varphi)$, où φ est l'angle de rotation de la manivelle.

Après avoir déterminé la valeur moyenne de l'ordonnée de cette courbe, qui exprime la puissance moyenne pour un cycle $(N_f)_{moy}$ dépensée pour vaincre la force de frottement, on trouve que le coefficient de rendement est égal à

$$\eta = \frac{N - (N_f)_{moy}}{N},$$

où N est la puissance consommée par le mécanisme.

Il est évident que l'on doit déterminer le coefficient de rendement seulement pour la période d'un mouvement en régime régulier.

De la même manière, on peut déterminer le coefficient de rendement des mécanismes comprenant en plus des couples de rotation, des couples de translation et des couples supérieurs.

. Parfois les installations mécaniques, en consommant l'énergie mécanique et en accomplissant leurs désignations, n'arrivent pas à vaincre aucune résistance utile, dépensant ainsi toute l'énergie consommée pour surmonter les résistances nuisibles. Par exemple, la force employée dans une installation de transport en déplaçant la charge sur une certaine distance dans la direction horizontale fournit un travail nécessaire, donc un travail utile qui cependant ne peut être exprimé par une grandeur différente de zéro, puisque pendant toute la durée du déplacement de la charge seules les résistances nuisibles sont surmontées; la force motrice appliquée à un mécanisme de minuterie, c'est-à-dire le poids des haltères ou la pression du ressort remonté, effectue un travail nécessaire et, par conséquent, un travail utile en déplaçant les aiguilles, mais ne surmonte aucune résistance utile.

Il découle de ce qui vient d'être exposé, que le terme «travail utile» a une signification conventionnelle et que le coefficient de rendement peut évaluer le degré de perfectionnement seulement des installations destinées soit à transformer l'énergie d'un aspect

à un autre soit à véhiculer l'énergie d'un point à un autre. Exemple de mécanisme destiné à transformer l'énergie d'un type en un autre: moteur à combustion interne où l'énergie chimique du carburant est transformée d'abord en énergie calorifique, puis en énergie mécanique; génératrice de courant électrique transformant l'énergie mécanique en énergie électrique; moteur électrique transformant l'énergie électrique en énergie mécanique.

Exemples de mécanismes véhiculant l'énergie d'un point à un autre : conduite de vapeur, fils électriques, arbre à deux poulies en rotation sur des paliers, etc.

Les mécanismes de transport déplaçant des charges dans la direction horizontale ainsi que toute la diversité des instruments ne dépensent pas d'énergie pour surmonter les résistances utiles. Le degré de perfectionnement de ces mécanismes peut être évalué à l'aide de différentes caractéristiques, mais non par le coefficient de rendement, qui, pour ces mécanismes, est égal à zéro ou est très voisin de zéro.

36. EQUATION DU MOUVEMENT DES MACHINES

Pendant le fonctionnement d'une machine tous ses points liés aux parties mobiles de la machine sont en mouvement sur des trajectoires fermées avec des vitesses et des accélérations différentes pour différentes positions. Quand la machine se trouve en régime régulier, les vitesses et les accélérations de tous les points, après des intervalles de temps donnés, répètent leurs valeurs en grandeur et en direction. Par exemple, pendant la rotation de la manivelle à une vitesse angulaire uniforme, la machine est mise au régime régulier parce que les vitesses et les accélérations de tous les points des chaînons varient d'après des lois données pour la durée de chaque tour de la manivelle. La durée du cycle pendant lequel les vitesses et les accélérations varient suivant des lois données peut être aussi plus grande que les intervalles de temps pendant lesquels la manivelle accomplit un tour: la manivelle peut tourner aussi avec une vitesse angulaire non uniforme variant suivant une loi donnée pendant deux tours ou plus.

Le fonctionnement d'une machine dès l'instant d'embrayage jusqu'à l'instant de débrayage peut être divisé en trois périodes: la période d'embrayage, la période du mouvement en régime permanent et la période de débrayage.

Pendant la période d'embrayage le travail A_m des forces motrices consommé par la machine est dépensé pour surmonter les résistances utiles et nuisibles et pour communiquer aux points mobiles l'énergie cinétique. L'équation du mouvement de la machine

se rapportant à un intervalle quelconque (par exemple, pendant le temps nécessaire à la manivelle pour accomplir un tour) de cette période est de la forme

$$A_m = A_r + \left(\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}\right),$$

où A_r est le travail des résistances utiles et nuisibles;
m la masse d'un point matériel du chaînon mobile;
v et v_0 sont respectivement les vitesses d'un point matériel à la fin et au début de l'intervalle de temps considéré;
$\sum \frac{mv^2}{2}$ l'énergie cinétique de tous les points matériels des chaînons mobiles à la fin de l'intervalle de temps;
$\sum \frac{mv_0^2}{2}$ l'énergie cinétique de tous les points matériels des chaînons mobiles au début de l'intervalle de temps.

Pendant la période d'embrayage le mouvement de la machine n'est pas encore établi.

Pendant la période du mouvement, la vitesse de chaque point matériel à la fin du cycle est égale à la vitesse du début du cycle suivant, puisque la fin du cycle précédent coïncide avec le début du cycle suivant. Donc, le terme entre parenthèses du second membre de l'équation donnée ci-dessus est égal à zéro et l'équation pour la période du mouvement établi prend la forme

$$A_m = A_r.$$

Ceci signifie que pendant la période du mouvement, le travail des forces mobiles est dépensé pour surmonter les résistances utiles et nuisibles.

La période de débrayage commence pour $A_m < A_r$, en particulier dès l'interruption du travail des forces mobiles. Pour $A_m = 0$ le mouvement se prolonge un certain temps au dépens de l'énergie cinétique accumulée par la partie mobile de la machine. Or, comme les vitesses de tous ses points diminuent graduellement, le terme entre parenthèses dans l'équation donnée ci-dessus devient négatif. En le faisant passer dans le premier membre de l'équation, on trouve que l'équation du mouvement, correspondant à cette période, est de la forme

$$\sum \frac{mv_0^2}{2} - \sum \frac{mv^2}{2} = A_r.$$

Cela veut dire que pendant la période de débrayage l'énergie cinétique des parties mobiles de la machine est absorbée par le travail des résistances utiles et nuisibles.

Les équations données ci-dessus sont souvent incommodes pour résoudre les problèmes pratiques étant donné que les forces agissantes sont appliquées aux différents chaînons qui ont des masses différentes. Pour simplifier les problèmes dépendant de la résolution des équations données plus haut, on applique les méthodes de réduction de toutes les forces et de toutes les masses à un chaînon unique. Après cette réduction l'étude dynamique de la machine se ramène à l'étude d'un seul chaînon dit chaînon de réduction.

37. RÉDUCTION DES FORCES

L'action mutuelle de toutes les forces appliquées aux différents chaînons d'un mécanisme définit la puissance qui doit à chaque instant être communiquée de l'extérieur au chaînon menant afin que son mouvement puisse s'accomplir suivant la loi donnée. Si les intensités, les directions et les points d'application des forces agissant sur les différents chaînons sont connus, le problème de la détermination de la puissance qui doit être transmise au chaînon menant peut être alors résolu puisque les vitesses des points d'application des forces nécessaires pour la détermination des puissances peuvent être trouvées à l'aide du plan des vitesses. Pour résoudre ce problème, toutes les forces agissant sur le mécanisme sont remplacées par une seule force appliquée au chaînon menant et dont la puissance est égale à la somme des puissances des forces agissant sur les différents chaînons.

Cette force s'appelle *force de réduction*.

L'intensité de la force de réduction se calcule en se donnant sa direction et son point d'application. Le point d'application de la force de réduction s'appelle *point de réduction*.

Le problème relatif à la détermination de la force de réduction se résout très simplement en utilisant le théorème sur les leviers de N. Joukovsky.

Théorème de N. Joukovsky. La somme des moments de toutes les forces (y compris la force d'inertie) agissant sur les chaînons d'un mécanisme après avoir été déplacées parallèlement à elles-mêmes en des points homologues du plan des vitesses ayant subi une rotation de 90° par rapport au pôle, est égale à zéro.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le principe des déplacements virtuels selon lequel la somme des travaux élémentaires de toutes les forces, agissant sur un système de forces (y compris les forces d'inertie) pour des déplacements virtuels du système, est égale à zéro.

Pour un mécanisme dont les mouvements des chaînons sont définis par les moments de son chaînon menant, l'expression

mathématique de ce principe se met sous la forme

$$P_1\,ds_1\cos\alpha_1 + P_2\,ds_2\cos\alpha_2 + \ldots + P_n\,ds_n\cos\alpha_n = 0$$

ou sous forme contractée

$$\sum_1^n P_j\,ds_j\cos\alpha_j = 0,$$

où P_j sont les forces;

ds_j les déplacements infiniment petits des points d'application des forces;

α_j les angles formés par les forces et les directions des déplacements des points d'application des forces.

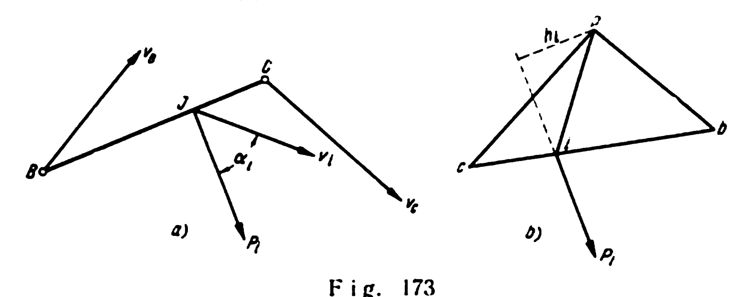


Fig. 173

En divisant les deux membres de l'équation par l'intervalle de temps infiniment petit dt, pendant lequel les déplacements ont lieu, on trouve

$$\sum_1^n P_j\frac{ds_j}{dt}\cos\alpha_j = \sum_1^n P_j v_j\cos\alpha_j = \sum_1^n N_j = 0,$$

où v_j sont les vitesses des points d'application des forces P_j;

$v_j\cos\alpha_j$ les projections des vitesses de ces mêmes points sur les lignes d'action des forces P_j;

N_j les puissances des forces P_j.

On a donné sur les fig. 173*a* et 173*b* le schéma du chaînon *BC* avec le vecteur-force $\vec{P}_j$ appliqué au point *J* et le plan des vitesses du chaînon qui a subi une rotation de 90° et le vecteur-force $\vec{P}_j$ déplacé parallèlement à lui au point *i* du plan.

En utilisant le plan des vitesses qui a subi une rotation, la puissance de la force P_j peut s'exprimer de la manière suivante:

$$N_j = P_j v_j\cos\alpha_j = P_j(pi)\mu_v\cos\alpha_j = P_j h_j \mu_v,$$

où h_j est la perpendiculaire abaissée du pôle *p* sur la ligne d'action de la force P_j;

μ_v l'échelle du plan des vitesses.

L'angle entre $\vec{pj}$ et hj est α_j puisque $\vec{pj} \perp v_j$ et $h_j \perp P_j$.

Puisque l'égalité obtenue ci-dessus est vraie pour toutes les forces P_j, alors

$$\sum_1^n N_j = \sum_1^n P_j h_j \mu_v = \mu_v \sum_1^n P_j h_j = 0,$$

mais puisque $\mu_v \neq 0$, alors

$$\sum_1^n P_j h_j = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

A l'aide du théorème de Joukovsky, on peut aisément définir la force qui doit être appliquée à un point donné du chaînon menant et portée par une ligne d'action donnée pour équilibrer toutes les forces agissant sur les différents chaînons du mécanisme.

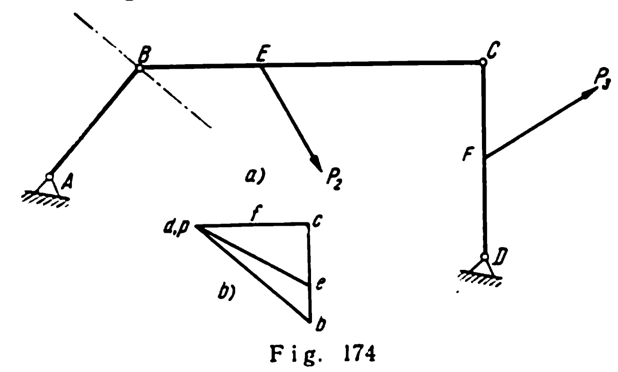


Fig. 174

Ce problème se ramène à la détermination du moment qui équilibre les moments des forces appliquées sur la barre à l'aide desquels, d'après le théorème de Joukovsky, on peut étudier le plan des vitesses qui a subi une rotation.

Expliquons-le sur un exemple.

Supposons que les forces P_2 et P_3 appliquées aux points E et F agissent sur les chaînons BC et CD du mécanisme représenté sur la fig. 174*a*. Pour déterminer des résultantes générales on a tenu compte des forces d'inertie. Déterminer la force P, qu'il faut appliquer au point B perpendiculairement au chaînon menant AB pour que dans la position du mécanisme représentée sur la fig. 174*a* elle équilibre les forces P_2 et P_3. Le chaînon AB est en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire inconnue. L'échelle du plan du mécanisme est inconnue.

Construisons le plan des vitesses par rapport à une échelle arbitraire, qui pratiquement est impossible à déterminer, car ni la vitesse angulaire du chaînon *AB* ni sa longueur ne sont données. Menons sur le plan des vitesses (fig. 174 *b*) les vecteurs $\vec{pe}$ et $\vec{pf}$ représentant respectivement les vitesses $\vec{v}_E$ et $\vec{v}_F$.

En faisant subir une rotation de 90° (fig. 175) au plan des vitesses, nous déplaçons parallèlement à eux-mêmes les vecteurs-force $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$ aux points *E* et *F* du plan du mécanisme. Abaissons respectivement du pôle *p* les perpendiculaires h_2 et h_3 aux lignes d'action des forces P_2 et P_3.

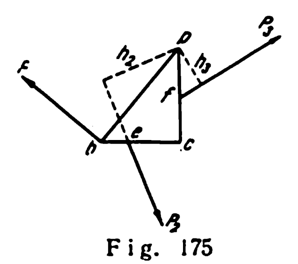


Fig. 175

D'après le théorème de Joukovsky, on assimile le plan des vitesses qui a subi une rotation à une barre de couples P_2h_2 et P_3h_3 et en tenant compte que, par hypothèse, la force inconnue *P* doit être appliquée au point *B* du mécanisme perpendiculairement au chaînon *AB* et, par conséquent, au point *B* du plan tourné des vitesses perpendiculairement à $\vec{pb}$, l'équation des moments prend la forme suivante:

$$P\,(pb) = P_2h_2 + P_3h_3,$$

d'où la grandeur qui équilibre les forces est

$$P = \frac{P_2h_2 + P_3h_3}{pb}.$$

Sur la fig. 175, la force qui s'équilibre avec *P* doit engendrer un couple faisant pivoter le plan des vitesses qui a subi une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que la force réduite P_r, égale en intensité et orientée en sens contraire, le fait tourner en sens contraire des aiguilles d'une montre.

Il découle de ce qui a été exposé que: 1) pour déterminer la force de réduction, il n'est pas du tout nécessaire de prendre en considération les dimensions des chaînons, mais il faut connaître seulement leurs longueurs relatives et leur disposition réciproque et 2) le plan des vitesses peut être construit par rapport à une échelle arbitraire, puisque ce ne sont pas les longueurs des perpendiculaires *h*, dépendant de l'échelle du plan, qui entrent dans l'expression de la force *P*, mais leurs rapports au bras de levier de la force *P*; de plus, ces rapports ne dépendent pas des échelles.

Pendant la détermination de l'intensité de la force *P*, nous avons déplacé seulement, sur le plan des vitesses qui a subi une rotation, les forces actives P_2 et P_3, tandis que les réactions dans

les couples cinématiques n'ont pas été déplacées. Tout ceci pour ne pas avoir à reporter jusqu'au pôle du plan des vitesses, qui a subi une rotation, les réactions dans les couples *A* et *D*. D'où on aurait que les moments de ces forces sont nuls. Quant aux réactions dans les couples *B* et *C*, c'est de chacun de ces couples qu'on aurait dû déplacer en un même point du plan tourné des vitesses deux forces égales, mais dirigées en sens inverses l'une par rapport à l'autre: l'une d'elles agissant sur un chaînon du couple et l'autre, sur un autre obtenu de manière que la somme des moments de ces forces soit égale à zéro.

Si les dimensions des chaînons du mécanisme sont données, alors, d'après l'intensité, la direction et le point d'application de la force de réduction, on peut déterminer le moment équilibrant engendré par le moteur, et si la vitesse angulaire du chaînon menant est connue, il est aussi possible de déterminer la puissance instantanée du moteur. En déterminant les puissances instantanées du moteur pour différentes positions du chaînon menant et en construisant le diagramme, on peut définir la puissance moyenne d'un moteur pour un tour du chaînon menant ou pour un cycle, si le cycle dépasse la durée d'un tour. La puissance moyenne du moteur ainsi déterminée est la puissance dépensée pour surmonter les résistances utiles. Pour calculer la puissance totale, il faut ajouter à la puissance dépensée pour surmonter les résistances utiles la puissance dépensée pour vaincre la force de frottement dans les couples cinématiques.

Il faut avoir en vue que la force de réduction est une force conventionnelle. Puisqu'il en est ainsi, alors, pendant son action, la puissance du mécanisme est égale à la puissance de toutes les forces appliquées au mécanisme; et comme l'intensité de la force de réduction est déterminée non seulement par les forces agissant sur le mécanisme, mais aussi par son point d'application et sa ligne d'action, alors on ne peut utiliser l'intensité de la force de réduction que dans les problèmes de dynamique des mécanismes liés à la détermination des puissances ou du travail. Par exemple, il est erroné, en partant de l'intensité, du point d'application et de la direction de la force de réduction, de déterminer les réactions dans les couples cinématiques ou de faire des calculs sur la résistance du chaînon sur lequel est appliquée la force de réduction.

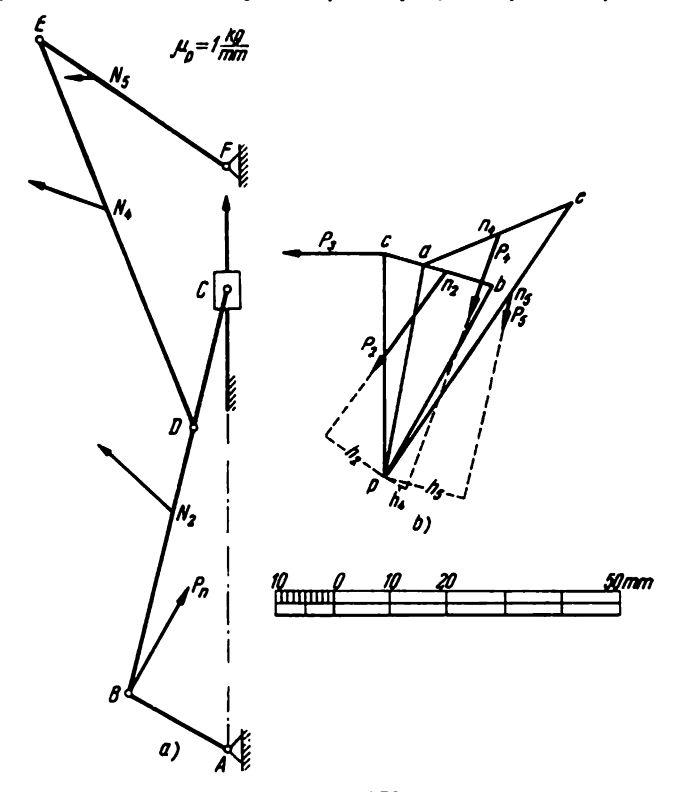
Exemple. Déterminer, pour le mécanisme représenté sur la fig. 124 *a* l'intensité et la direction de la force de réduction au point *B* dont la ligne d'action est perpendiculaire au chaînon *AB*.

En prolongeant sur la fig. 124 *a* les lignes d'action des forces P_2 et P_3 jusqu'à leur intersection avec les chaînons *BC* et *DE*, nous fixons les points auxquels ces forces sont appliquées sur les chaînons. La force P_5 est appliquée au point qui coïncide avec le centre de roulement K_5, la force P_3 est appliquée au point *C*. Sur la fig. 176 *a* on donne le mécanisme représenté

sur la fig. 124 *a* et les forces P_2, P_3, P_4 et P_5 appliquées respectivement aux points N_2, C, N_4 et N_5. La force P_1 est dirigée suivant le chaînon AB.

Sur la fig. 176 *b*, on a donné la copie exacte du plan des vitesses qui a été donné sur la fig. 124 *b*.

Après avoir déterminé la position des points n_2, n_4 et n_5 sur le plan des vitesses et après avoir conservé le plan des vitesses sous la forme donnée à la fig. 124 *b*, nous déplaçons en ces points les vecteurs-force $\vec{P}_2$, $\vec{P}_4$ et $\vec{P}_5$, tandis que le vecteur-force P_3 est déplacé jusqu'au point *c* parallèlement à



F i g. 176

lui-même après les avoir préalablement fait tourner de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Après avoir mené les bras de levier h_2, h_4 et h_5 des forces P_2, P_4 et P_5, l'équation, par rapport au point P, est donnée sous la forme :

$$P_{\text{équi}}\, pb = P_2h_2 + P_3pc - P_4h_4 - P_5h_5,$$

où $P_{\text{équi}}$ est l'intensité de la force appliquée au point *b* équilibrant les actions des quatre autres forces.

Les intensités des forces (voir p. 137) sont : $P_2 = 18$ kg ; $P_3 = 17{,}5$ kg ; $P_4 = 15{,}6$ kg ; $P_5 = 7$ kg.

Les longueurs des bras de levier sont: $h_2 = 17$ mm; $pc = 39$ mm; $h_4 = 4{,}5$ mm; $h_5 = 17$ mm; $pb \approx 39$ mm.

On a, en substituant les valeurs numériques $P_{équi} \cdot 39$ mm $= 18$ kg$\times$ $\times 17$ mm $+ 17{,}5$ kg$\cdot 39$ mm $- 15{,}6$ kg$\cdot 4{,}5$ mm $- 7$ kg$\cdot 17$ mm, d'où $P_{équi} =$ $= 20{,}4$ kg.

Le moment résultant des forces P_2, P_4 et P_5 tend à faire tourner le plan des vitesses autour du pôle p en sens inverse des aiguilles d'une montre parce que la force P appliquée au point b et dirigée perpendiculairement à pb doit créer un moment qui fera tourner le plan des vitesses dans le sens des aiguilles d'une montre. Par conséquent, $P_{équi}$ doit être dirigée du point b vers le bas et à droite, tandis que la force inconnue P_{Π}, du point b vers le haut et à gauche.

Ayant fait subir une rotation de 90° à toutes les forces dans le sens des aiguilles d'une montre et les ayant déplacées parallèlement à elles-mêmes jusqu'à leurs points d'application dans les chaînons du mécanisme, nous obtenons ces forces ainsi que la force inconnue P_{Π} sous la forme donnée sur la fig. 176 *a*.

Les forces P_1, P_{61} et P_{63} n'ont pas été prises en considération, puisque les deux dernières auraient dues être appliquées au pôle p, tandis que le vecteur-force $\vec{P}_1$, après la rotation de 90°, aurait dû être dirigé suivant la droite pb et, par suite, il n'aurait pu créer un couple par rapport au point p également.

38. MASSES DE RÉDUCTION

De même que pour les forces agissant sur un mécanisme, les masses de tous les chaînons peuvent être réduites en un point donné d'un chaînon donné. Il est préférable que toutes les forces et toutes les masses soient concentrées en un même point d'un chaînon, ce qui d'ailleurs se fait toujours.

On appelle **masse de réduction** une masse conventionnellement concentrée en un point du mécanisme dont l'énergie cinétique serait égale à la somme des énergies cinétiques des masses de tous les chaînons du mécanisme. Le point en lequel on suppose que toute la masse réduite est concentrée s'appelle **point de réduction**. Le chaînon contenant le point de réduction s'appelle **chaînon de réduction**.

Le procédé qui permet de déterminer son intensité découle de la définition même de la masse de réduction: il faut additionner les énergies cinétiques de tous les chaînons et diviser la somme obtenue par la moitié du carré de la vitesse du point de réduction. Si T_1, T_2, T_3 ..., T_k sont les énergies cinétiques du chaînon, m_R la masse réduite, v_R la vitesse du point de réduction, alors

$$m_R = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_k}{0{,}5\, v_R^2}.$$

Pour calculer la valeur de la masse de réduction, il faut connaître: 1) les longueurs l des chaînons du mécanisme; 2) les

masses m des chaînons ; 3) les moments d'inertie J des chaînons par rapport aux axes qui passent par les centres de gravité et 4) les positions des centres de gravité S. Les intensités et les directions des vitesses angulaires des chaînons sont sans importance.

Déterminons la grandeur de la masse de réduction concentrée au point B du mécanisme représenté sur la fig. 177 *a*. Nous supposerons que nous sommes en possession des données indiquées précédemment. Les indices inférieurs désignent les numéros des chaînons auxquels se rapporte telle ou telle grandeur. Les numéros des chaînons sont indiqués sur la fig. 177 *a*.

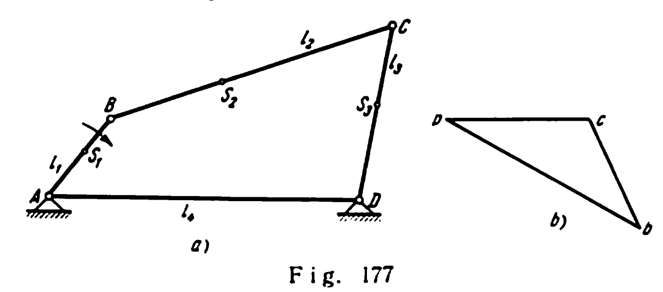


Fig. 177

Construisons le plan des vitesses par rapport à une échelle arbitraire en supposant que la vitesse angulaire ω a le sens des aiguilles d'une montre (fig. 177 *b*). Pour résoudre le problème posé, le sens de la vitesse angulaire ω_1 ne peut pas avoir d'influence, puisque les longueurs des vecteurs des plans des vitesses construits pour différents sens des vitesses angulaires ω_1 sont identiques, tandis que les sens de tous les vecteurs d'un même plan seront inverses à ceux des vecteurs homologues d'un autre plan. Les directions des vitesses linéaires et angulaires, pendant la détermination des valeurs cinétiques, n'ont pas d'importance puisque dans les expressions $\frac{mv^2}{2}$ et $J\frac{\omega^2}{2}$ participent les carrés des vitesses.

L'énergie cinétique du chaînon l est

$$T_1 = J_A \frac{\omega_1^2}{2},$$

où J_A est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation A.

Or, comme

$$J_A = J_1 + m_1 l_{AS_1}^2,$$

donc

$$T_1 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + m_1 l_{AS_1}^2 \frac{\omega_1^2}{2}.$$

Le chaînon *3* ainsi que le chaînon *1* sont animés d'un mouvement de rotation, donc on obtient d'une manière semblable

$$T_3 = J_3 \frac{\omega_3^2}{2} + m_3 l_{DS_3}^2 \frac{\omega_3^2}{2}.$$

Le mouvement composé du chaînon *2* peut être décomposé en mouvement de translation avec le centre de gravité S_2 et en mouvement de rotation autour de ce point. En décomposant le mouvement du chaînon *2* en ces deux mouvements, on a

$$T_2 = m_2 \frac{v_{S_2}^2}{2} + J_2 \frac{\omega_2^2}{2}.$$

La masse de réduction concentrée au point B est égale à

$$m_r = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{0{,}5\ v_B^2} = \frac{\left(J_1 + m_1 l_{AS_1}^2\right) \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + J_2 \frac{\omega_2^2}{2} + \left(J_3 + m_3 J_{DS_3}^2\right) \frac{\omega_3^2}{2}}{0{,}5\ v_B^2}.$$

En substituant

$$v_B = (pb)\,\mu_v, \quad v_{S_2} = (ps_2)\,\mu_v, \quad \omega_1 = \frac{pb}{l_1}\mu_v,$$
$$\omega_2 = \frac{bc}{l_2}\mu_v, \quad \omega_3 = \frac{pc}{l_3}\mu_v,$$

où μ_v est l'échelle inconnue du plan des vitesses, on ramène les équations obtenues ci-dessus à la forme

$$m_r = \frac{J_1 + m_1 l_{AS_1}^2}{l_1^2} + m_2 \left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + \frac{J_2}{l_2^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + \frac{J_3 + m_3 l_{DS_3}^2}{l_3^2}\left(\frac{pc}{pb}\right)^2.$$

Les vitesses angulaires des chaînons et l'échelle du plan des vitesses ne participent pas dans l'expression de la masse de réduction. Les facteurs de trois derniers termes du second membre contiennent les rapports des longueurs des vecteurs du plan des vitesses, mais non les longueurs absolues de ces vecteurs. Donc le plan des vitesses peut être construit par rapport à une échelle arbitraire.

La valeur du moment d'inertie de réduction J_r est égale à

$$J_r = m_r l_1^2.$$

Exemple 1. Déterminer pour le mécanisme représenté sur la fig. 124 *a*, d'après les données indiquées à la page 133, la masse de réduction concentrée au point B des chaînons BC, DE, EF et du coulisseau.

Déterminons les énergies cinétiques des chaînons.

Le mouvement composé du chaînon BC (chaînon n°2) peut être considéré comme la composition d'un mouvement de translation avec le centre de

gravité S_2 et d'un mouvement de rotation autour de ce point. Conformément à ceci on trouve

$$T_2 = m_2 \cdot \frac{v_{S_2}^2}{2} + J_2 \frac{\omega_2^2}{2} .$$

L'énergie cinétique du coulisseau (chaînon n°3) animé du mouvement de rotation est égale à

$$T_3 = m_3 \frac{v_C^2}{2} .$$

Le mouvement composé du chaînon DE (chaînon n°4) peut être décomposé en mouvement de translation avec le centre de gravité S_4 et en mouvement de rotation autour de ce point. Donc,

$$T_4 = m_4 \frac{v_{S_4}^2}{2} + J_4 \frac{\omega_4^2}{2} .$$

Le moment d'inertie J_{EF} du chaînon EF (chaînon n° 5) animé d'un mouvement de rotation est égal à

$$J_{EF} = J_5 + m_5 l_{FS_5}^2 .$$

L'énergie cinétique du chaînon EF est égale à

$$T_5 = (J_5 + m_5 l_{FS_5}) \frac{\omega_5^2}{2} .$$

L'énergie cinétique des quatre chaînons est égale à

$$T = \frac{m_2 v_{S_2}^2 + J_2\omega_2^2 + m_3 v_C^2 + m_4 v_{S_4}^2 + J_4\omega_4^2 + (J_5 + m_5 l_{FS_5})\omega_5^2}{2} .$$

Les moments d'inertie, par rapport aux axes qui passent par les centres de gravité, sont donnés à la page 132, les masses des chaînons à la page 137. Pour déterminer les vitesses des centres de gravité, on a recours à la construction du plan des vitesses donnée sur la fig. 124 *b* et dont la copie est donnée à la fig. 178. Ayant déterminé les positions des points s_2, s_4 et s_5 en menant les vecteurs ps_2, ps_4 et ps_5 et après avoir mesuré la longueur de ces vecteurs ainsi que celle du vecteur pc, nous trouvons:

$$v_{S_2} = ps_2\mu_v = 38 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm} = 1{,}52 \text{ m/s};$$
$$v_{S_4} = ps_4\mu_v = 47 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm} = 1{,}88 \text{ m/s};$$
$$v_{S_5} = ps_5\mu_v = 23{,}2 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm} = 0{,}93 \text{ m/s};$$
$$v_C = pc\mu_v = 39 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm} = 1{,}56 \text{ m/s}.$$

Les vitesses angulaires des chaînons sont

$$\omega_2 = \frac{bc\mu_v}{l_{BC}} = \frac{19{,}5 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm}}{0{,}18 \text{ m}} = 4{,}3 \text{ s}^{-1};$$

$$\omega_4 = \frac{de\mu_v}{l_{ED}} = \frac{28 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm}}{0{,}18 \text{ m}} = 6{,}2 \text{ s}^{-1};$$

$$\omega_5 = \frac{pe\mu_v}{l_{EF}} = \frac{58 \text{ mm}\cdot 0{,}04 \text{ m/s}\cdot\text{mm}}{0{,}1 \text{ m}} = 23{,}2 \text{ s}^{-1}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve que $T = 2{,}85$ kgm.

D'autre part, $T = m_R \frac{v_B^2}{2}$.

En prenant en considération que la vitesse du point B est $v_B = 1{,}57$ m/s (voir p. 133), nous trouvons $2{,}85 = 0{,}5\ m_R\cdot(1{,}57)^2$, d'où $m_R = 2{,}32$ kg s²/m.

Le moment d'inertie de réduction est : $J_R = m_R\cdot l_{AB}^2 = 2{,}32\cdot(0{,}05)^2 =$ $= 0{,}0058$ kg·m·s².

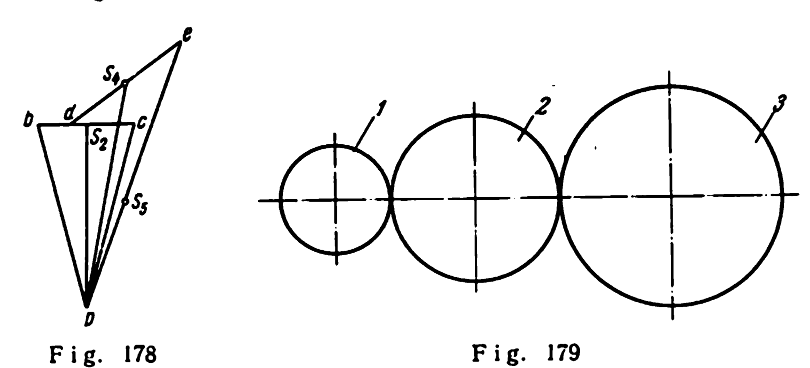


Fig. 178 Fig. 179

Exemple 2. Sur la fig. 179, on a représenté les cercles primitifs de trois roues dentées en engrènement et dont les nombres de dents sont $z_1 = 20$, $z_2 = 30$ et $z_3 = 40$. Les moments d'inertie des roues, exprimés en kg·m·s², sont $J_1 = 0{,}01$, $J_2 = 0{,}0225$, $J_3 = 0{,}04$. Déterminer le moment d'inertie de réduction J_R par rapport à l'arbre de la roue *1*, engendré par les masses de toutes les roues dentées.

Les vitesses angulaires des roues sont inversement proportionnelles aux nombres de dents. Exprimons les vitesses angulaires des roues *2* et *3* à l'aide de la vitesse angulaire de la roue *1* :

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} = \omega_1 \frac{20}{30} = \frac{\omega_1}{1{,}5};\quad \omega_3 = \omega_1 \frac{z_1}{z_3} = \omega_1 \frac{20}{40} = \frac{\omega_1}{2}.$$

Les énergies cinétiques des roues sont :

$$T_1 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} = 0{,}5\cdot 0{,}01\cdot\omega_1^2 \text{kg}\cdot m;$$

$$T_2 = J_2 \frac{\omega_2^2}{2} = 0{,}5\cdot 0{,}0225\cdot\left(\frac{\omega_1}{1{,}5}\right)^2 = 0{,}5\cdot 0{,}01\cdot\omega_1^2 \text{ kg}\cdot m;$$

$$T_3 = J_3 \frac{\omega_3^2}{2} = 0{,}5\cdot 0{,}04\cdot\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 = 0{,}5\cdot 0{,}01\cdot\omega_1^2 \text{kg}\cdot\text{m}.$$

L'énergie cinétique de toutes les roues est :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}03 \cdot \omega_1^2 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

D'autre part, $T = J_R \frac{\omega_1^2}{2}$,

d'où $J_R = 0{,}03$ kg·m·s².

39. EQUATION DU MOUVEMENT DU POINT ET DU CHAÎNON DE RÉDUCTION

Après avoir concentré les forces et les masses en un point, l'équation du mouvement

$$A_m = A_r + \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}$$

se met sous la forme plus simple

$$A_{nm} = A_{nr} + \frac{m_R v_R^2}{2} - \frac{m_{R_0} v_{R_0}^2}{2},$$

où A_{nm} et A_{nr} sont respectivement le travail des forces motrices et le travail des résistances pendant l'intervalle de temps considéré ;

m_R et m_{R_0}, les valeurs respectives des masses de réduction à la fin et au début de l'intrevalle considéré ;

v_R et v_{R_0}, les vitesses linéaires respectives du point de réduction à la fin et au début de l'intervalle de temps considéré.

Si les forces et les masses de réduction sont concentrées en un point et si les lois de variation des forces et des masses de réduction sont connues, alors pour résoudre le problème du mouvement du chaînon de réduction, on peut utiliser l'équation suivante mise sous la forme différentielle

$$(P_m + P_r)\, ds = \frac{1}{2} d(m_r v_r^2) = m_r v_r dv_r + \frac{1}{2} v_r^2 dm_r,$$

où dans la somme algébrique $P_m + P_r$ les termes P_m et P_r doivent être pris avec leurs signes correspondants.

Sous cette forme l'équation du mouvement est facilement utilisable si le chaînon de réduction est animé d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation du chaînon de réduction, il est préférable de prendre les moments de réduction M_m et M_r à la place des forces de réduction P_m et P_r et le moment d'inertie de réduction J_R au lieu de la masse de réduction m_R.

Dans ce dernier cas, l'équation du mouvement se met sous la forme suivante

$$(M_m + M_r)\, d\varphi = \frac{1}{2}\, d\,(J_R \omega_R^2) = J_R \omega_R d\omega_R + \frac{1}{2}\, \omega_R^2 dJ_R,$$

où φ est l'angle de rotation du chaînon de réduction et ω_R, la vitesse angulaire du chaînon de réduction.

Suivant les cas, les forces P_m et P_r peuvent être des constantes ou des fonctions de la vitesse, soit encore des fonctions du chemin parcouru par le point de réduction; de même, les moments M_m et M_r peuvent être respectivement soit des constantes, soit des fonctions de la vitesse angulaire ou soit encore des fonctions de l'angle de rotation du chaînon de réduction. La valeur de la masse de réduction peut également être une constante ou une fonction du chemin parcouru par le point de réduction, la valeur du moment d'inertie de réduction peut respectivement être une constante ou une fonction de l'angle de rotation du chaînon de rotation. Les lois de variation de toutes les grandeurs qui viennent d'être énumérées ci-dessus peuvent être données soit sous forme analytique, soit sous forme graphique. En fonction de la dépendance : des forces (ou des moments) et des masses de réduction (ou des moments d'inertie de réduction), les équations du mouvement prennent telles ou telles formes particulières.

40. RÉGLAGE DU FONCTIONNEMENT DES MACHINES

En fonction de la désignation assignée à une machine, on est amené à régler soit la vitesse de son organe mobile, soit son rendement ou soit encore la pression qu'elle engendre. Par exemple, dans un moteur stationnaire, il faut assurer une vitesse constante à l'organe mobile, dans un moteur de transport (par exemple, le moteur d'une automobile) il faut avoir la possibilité de faire varier la vitesse entre de grandes limites. Dans les compresseurs servant aux déplacements des gaz ou dans les pompes pour le déplacement des liquides, la pression sous laquelle la substance en déplacement entre par la conduite, ou le débit unitaire, c'est-à-dire la quantité de substance à déplacer pendant l'unité de temps, peut être l'objet d'un réglage. Dans la suite, nous considérerons uniquement le réglage des vitesses des organes mobiles des moteurs.

Il découle de l'équation du mouvement de la machine que pour faire varier les vitesses des points matériels des parties en mouvement de la machine, il faut modifier la différence $(A_m - A_r)$ du travail des forces motrices et du travail des résistances. On

peut modifier cette différence en faisant varier soit la valeur du travail des forces motrices, soit la valeur du travail des résistances, soit encore les deux simultanément.

Le réglage de la vitesse de l'organe mobile par la diminution du travail des résistances n'est pas avantageux : pour pouvoir réduire les résistances nuisibles, la machine doit fonctionner avec des résistances nuisibles *a priori* accrues (c'est à quoi est dépensée l'énergie supplémentaire) ; en ce qui concerne les résistances utiles, les diminuer pendant le réglage de la vitesse signifierait priver la machine de la possibilité d'accomplir sa désignation.

Les dispositifs à l'aide desquels les résistances nuisibles peuvent être augmentées quand on juge nécessaire de diminuer la vitesse, sont appliqués sous forme de frein dans les différents genres de machines de transport où ils sont non seulement utiles, mais même absolument indispensables. Ce genre de dispositifs est utilisé seulement dans les cas où l'arrêt total du travail des forces mobiles n'est pas suffisant pour assurer une diminution rapide de la vitesse ou quand l'action des forces mobiles ne peut être éliminée ; par exemple, quand une automobile descend une côte.

Les moteurs stationnaires servant à mettre en action des machines-outils, des pompes, des générateurs d'énergie électrique, etc., ne sont pas munis de freins. En cas de nécessité d'une diminution rapide des vitesses des parties mobiles, les dispositifs de freinage sont montés non pas sur les moteurs, mais sur les machines-outils à l'emplacement jugé nécessaire d'après les considérations de la sécurité technique, ou d'après les besoins de la production. Dans ces cas, on installe également des dispositifs pour couper rapidement la machine-outil du moteur.

Ainsi, si on ne prend pas en considération les freins, qui sont essentiellement appliqués dans les machines de transport et qui servent seulement à réduire la vitesse des organes mobiles des machines, le plus souvent, c'est par une variation du travail des forces motrices qu'on procède essentiellement lors du réglage de la différence du travail des forces motrices et du travail des résistances. On le réalise en agissant sur l'organe de la machine qui véhicule l'énergie à l'organe recepteur du travail des forces extérieures (au piston dans une machine à vapeur ou dans un moteur à combustion interne, aux pales, dans la turbine hydraulique ou à vapeur, etc.). Dans un moteur de transport, le réglage est réalisé par la personne qui règle le fonctionnement du moteur ; dans un moteur stationnaire, le réglage de l'organe mobile qui doit être en rotation avec une vitesse angulaire constante, s'effectue automatiquement.

D'après le procédé de réglage de la vitesse (nombre de tours pendant l'unité de temps) de l'organe mobile, les moteurs station-

naires peuvent être divisés en trois groupes: 1) moteurs électriques; 2) moteurs dans lesquels les organes, qui reçoivent l'énergie véhiculée au moteur, sont animés d'un mouvement de rotation (turbines hydrauliques ou à vapeur) et 3) moteurs à pistons (machines à vapeur, moteurs à combustion interne).

Dans les moteurs électriques stationnaires, le maintien de la vitesse à un niveau constant s'obtient de lui-même sans aucun dispositif de réglage puisque, d'après la construction même du moteur, on a assuré une corrélation permanente entre la puissance développée par le moteur et l'énergie qu'il consomme en sa partie électrique. L'organe qui reçoit l'énergie que doit consommer le moteur électrique se trouve en relation directe avec la source d'énergie. Cette relation se manifeste en ce que la quantité d'énergie consommée par le moteur dépend inversement (mais non proportionnellement) de la vitesse de rotation de l'organe mobile: quand on augmente le travail de résistance, la vitesse angulaire de l'organe mobile diminue un peu, d'où l'afflux d'énergie au moteur augmente. Quand on diminue le travail de résistance, au contraire, la vitesse angulaire augmente et, par suite, l'afflux d'énergie diminue. Par conséquent, le nombre de tours de l'organe mobile pendant l'unité de temps n'est pas constant durant la variation du travail des résistances, mais est maintenu entre certaines limites voisines l'une de l'autre. Ainsi, dans les moteurs les plus répandus dans l'industrie (triphasés, asynchrones), le nombre minimum de tours à la minute en pleine charge est seulement de trois à quatre pour-cent inférieur au nombre maximum de la marche à vide. Cette différence, dans la majorité des cas, n'a aucune importance pratique, ce qui d'ailleurs est confirmé, puisque ces moteurs sont très répandus.

Dans un moteur du deuxième genre (turbines hydrauliques ou à vapeur), l'organe recevant l'énergie véhiculée au moteur de la même manière que dans les moteurs électriques se trouve sous l'action continue de la source d'énergie. Par exemple, dans une turbine hydraulique (fig. 180), l'eau sous pression, par les conduits directeurs A (disposés autour de la roue S fixée à l'arbre principal B), arrive continuellement par les canaux de la roue formés par les pales D qui reçoivent l'énergie mécanique véhiculée jusqu'à la turbine avec l'eau. Cependant, contrairement à ce qui a lieu dans les moteurs électriques, l'organe qui reçoit le travail des forces extérieures (roue à pales) ne se trouve pas, dans les moteurs du deuxième genre, en interaction directe avec la source d'énergie. Dans ces moteurs, on doit réaliser cette interaction à l'aide de dispositifs mécaniques spéciaux appelés régulateurs.

Jusqu'à l'heure actuelle, on applique en pratique de nombreux systèmes de régulateurs basés sur différents principes. Un des pre-

miers régulateurs, très répandu et employé encore aujourd'hui, est le régulateur centrifuge représenté schématiquement sur la fig. 181, où *M* sont des boules pesantes fixées aux extrémités des tiges *AC* et *BD* et liées à un arbre vertical *S* par les couples de rotation *A* et *B*. Sur l'arbre *S*, mis en mouvement par l'arbre principal d'un moteur par l'intermédiaire d'un mécanisme de transmission quelconque (qui n'est pas représenté sur la fig. 181), glisse un coulisseau *K*, relié aux couples de rotation *E* et *F* par les tiges *CE* et *DF*; les tiges *CE* et *DF* sont liées aux couples de rotation *C* et *D* par les tiges *AC* et *BD*. Le coulisseau *K* est lié à l'organe du moteur, conduisant le corps mobile à l'organe, qui assimile le travail des forces extérieures (la vapeur ou l'eau sous

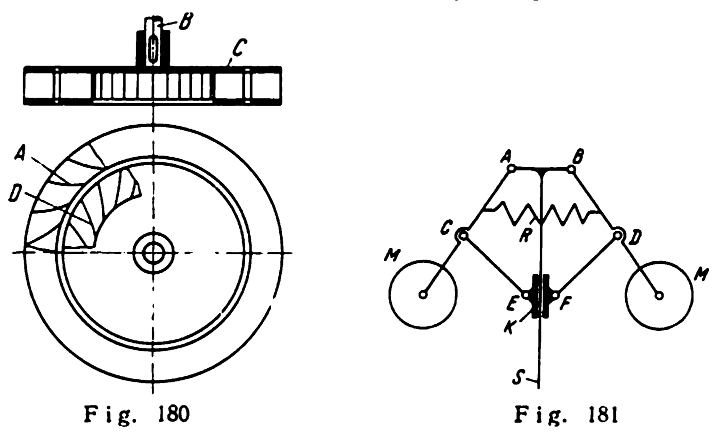


Fig. 180 Fig. 181

pression, le carburant sous forme liquide ou gazeuse). La liaison, qui n'est pas représentée sur la fig. 181, est exécutée de manière que pendant le mouvement de bas en haut du coulisseau l'afflux d'énergie dans le moteur diminue et pendant le mouvement de haut en bas, augmente.

Pour une vitesse angulaire donnée de l'arbre principal du moteur et, par conséquent, de l'arbre du régulateur, les tiges *AC* et *BD*, ainsi que le coulisseau *K*, occupent une position déterminée, puisque la force élastique du ressort *R* est équilibrée par la force centrifuge d'inertie des boules *M*.

Avec la diminution du travail des résistances, la vitesse angulaire de l'arbre principal du moteur, et, par conséquent, de l'arbre *S* du régulateur, augmente, ce qui a pour résultat d'accroître les forces centrifuges créées par les boules, et le coulisseau *K*, en se déplaçant vers le haut, diminue l'afflux d'énergie au moteur, rétablissant ainsi l'équilibre entre le travail des forces mobiles et le travail des résistances. Avec l'augmentation du travail des ré-

sistances, le coulisseau K en se déplaçant vers le bas augmente l'afflux d'énergie au moteur et rétablit à nouveau l'équilibre.

Il découle de ce qui a été exposé que tant que le travail des résistances ne change pas, le régulateur maintient la vitesse angulaire de l'arbre principal du moteur très voisine de la constante, mais pour différentes valeurs du travail des résistances le coulisseau doit se trouver à différentes positions sur l'arbre du régulateur; ceci est possible seulement pour différentes vitesses angulaires de l'arbre principal du moteur.

Il va de soi que dans le projet du régulateur il faut prévoir une vitesse angulaire de l'arbre principal du moteur qui ne dépasse pas les limites admissibles dans la pratique pendant le réglage. Au cas où l'on doit maintenir la vitesse angulaire à un niveau constant indépendamment de la puissance développée par le moteur, on applique des dispositifs de réglage plus complexes.

Dans les moteurs à piston, l'organe qui reçoit le travail des forces mobiles (piston) est animé d'un mouvement alternatif de va-et-vient. Cela complique considérablement le réglage de la vitesse angulaire de l'arbre principal du moteur.

Tous les moteurs à piston sont basés sur le principe du mécanisme manivelle-bielle.

On a représenté dans le chapitre I sur la fig. 13 *a* (voir p. 11) le schéma simplifié du moteur monocylindre à combustion interne, et sur la fig. 13 *b*, le schéma cinématique du mécanisme fondamental de ce moteur transformant le mouvement de translation alterné du chaînon mobile (piston) en mouvement de rotation de la manivelle rigidement liée à l'arbre principal du moteur.

On donne, sur la fig. 182, le diagramme indicateur d'un moteur Diesel à quatre temps, c'est-à-dire d'un type de moteur à combustion interne très répandu, qui montre les forces auxquelles est soumis le piston pendant le fonctionnement de ce moteur. On a porté suivant l'axe des abscisses du diagramme les volumes et suivant l'axe des ordonnées du diagramme la pression des gaz se trouvant au-dessus du piston. Quand le piston se trouve au point extrême le plus haut de la fig. 13 *a*, alors le volume V_0 (fig. 182) des gaz au-dessus du piston est minimum; le volume V_0 s'appelle «espace mort». Au point extrême le plus bas du piston, distant du point extrême le plus haut du double de la longueur de la manivelle, le volume V_{max} des gaz qui se trouvent au-dessus du piston est maximum. Le volume V des gaz, qui se trouvent au-dessus du piston quand le piston est à la distance s du point extrême le plus haut et d'aire F pour la section transversale du piston, s'exprime de la manière suivante:

$$V = V_0 + F \cdot s.$$

Au point *a* du diagramme qui correspond au point extrême le plus haut du piston, la pression p_a des gaz est maximum puisque le cylindre contient de l'air à haute température obtenue par la compression rapide de l'air jusqu'à plusieurs dizaines d'atmosphères pendant la course précédente du piston de bas en haut.

La partie supérieure du diagramme, à partir du point *a* vers la droite, montre ce qui se produit dans le cylindre lorsque le piston se déplace vers le bas à partir du point extrême le plus haut. Du

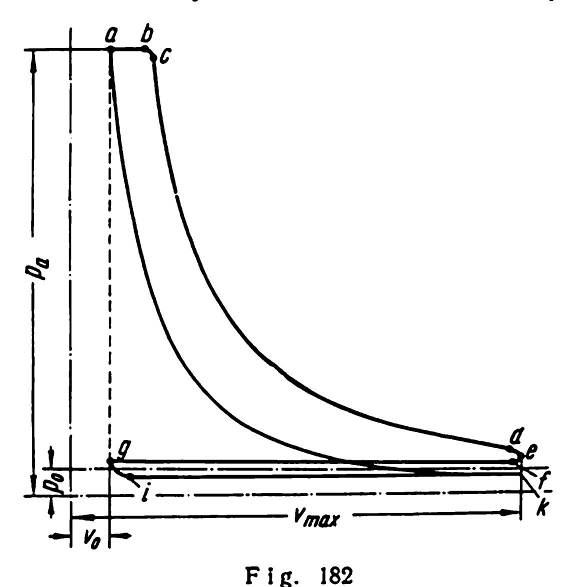


Fig. 182

point *a* au point *b*, la pression des gaz est constante malgré l'augmentation du volume; ceci est possible parce que, à cette partie de la course du piston, dans le cylindre s'introduit du carburant (pétrole) finement pulvérisé, s'enflammant spontanément en se mélangeant à l'air comprimé dont la température est supérieure à la température de l'inflammation spontanée du fluide. Malgré l'augmentation du volume du gaz pendant le mouvement du piston, la pression ne décroît pas, premièrement parce que pendant la combustion du carburant la quantité de gaz croît et deuxièmement parce qu'il y a augmentation de la température qui sans l'afflux de chaleur engendrée par la combustion du carburant, décroîtrait avec l'augmentation du volume.

Pour la position du piston qui correspond au point *b* du diagramme, l'admission du carburant dans le cylindre est interrompue, donc la pression commence à décroître. D'abord, du point

b au point *c*, la pression décroît lentement, il y a encore combustion du carburant qui n'a pas brûlé au moment de l'interruption de l'admission de celui-ci dans le cylindre. Du point *c* la pression décroît rapidement suivant la courbe *cd* pendant le mouvement du piston vers le point extrême inférieur. Le point *e* du diagramme correspond au point extrême le plus bas du piston.

A partir du point *d*, la pression décroît non pas suivant la courbe *de*, mais bien plus rapidement. Ceci est possible parce que pour la position du piston qui correspond au point *d* du diagramme, la soupape d'échappement commence à s'ouvrir (non indiquée sur la fig. 13, *a*), mettant en communication avec l'atmosphère le volume du cylindre qui se trouve au-dessus du piston. Par conséquent, sur la partie du diagramme commençant au point *d*, dans la direction de gauche à droite, la pression décroît non seulement par suite de l'augmentation du volume des gaz, mais aussi comme conséquence de leur échappement partiel dans l'atmosphère.

Pendant la course inverse du piston, de bas en haut, les produits de la combustion sont chassés en dehors du cylindre par la soupape d'échappement ouverte. La pression des gaz étant en outre voisine de la pression atmosphérique (l'arc de courbe *fg* du diagramme), mais un peu supérieure à la pression atmosphérique P_0, puisque c'est seulement grâce à cette différence de pressions des deux côtés de la soupape d'échappement qu'on peut communiquer aux gaz la vitesse nécessaire pour qu'ils puissent s'échapper et surmonter les résistances créées par leurs déplacements.

Le point *g* du diagramme correspond à la position la plus haute de la course du piston. Pendant la course suivante du piston, de haut en bas, avec la soupape d'échappement fermée et la soupape d'admission ouverte, il se produit aspiration de l'air atmosphérique dans le cylindre. La pression au début de la course décroît selon l'arc de courbe *gi*, puis, jusqu'à la fin de la course du piston vers le bas (suivant l'arc de courbe *ik* du diagramme), elle est maintenue légèrement inférieure à la pression atmosphérique pour la raison indiquée.

Pendant la course suivante du piston, de bas en haut, avec les soupapes d'échappement et d'admission fermées, il se produit compression de l'air (l'arc de courbe *ka*) jusqu'à une pression de plusieurs dizaines d'atmosphères, d'où la température de l'air, vers la fin de la course, s'élève jusqu'à plusieurs centaines de degrés et atteint une température supérieure à celle du carburant spontanément inflammable qui, finement pulvérisé, commence à pénétrer dans le cylindre au début de la course suivante du piston vers le bas.

Plus haut, en omettant certains détails n'ayant aucune importance pour le but que nous nous sommes fixé, nous avons décrit

succinctement le fonctionnement d'un moteur Diesel à quatre temps (moteur à combustion interne). Il découle de ce qui a été exposé ci-dessus que, des quatre courses du piston, une seule, pendant laquelle la pression $(p - p_0)$ (où p est la pression des gaz se trouvant au-dessus du piston, et p_0 la pression atmosphérique) est dirigée dans le sens de la course du piston et engendre donc la force qui met en mouvement le piston; cette course du piston s'appelle course utile. Pendant les deux courses venant après la course utile, le piston a à surmonter de faibles résistances à son déplacement et pendant celle qui suit les deux précédentes, de grandes résistances qui augmentent progressivement.

Pendant l'action de la force à laquelle le piston est soumis de la part des gaz, le moteur non seulement ne pourrait fonctionner continûment, mais le piston serait incapable d'accomplir la course de bas en haut même en l'absence de toute résistance à son déplacement, si, pendant la durée des trois courses du piston qui suivent la course utile, la rotation de l'arbre principal ne se poursuivait par inertie.

Le fonctionnement du moteur ne devient possible qu'en présence d'une roue appelée volant sur l'arbre principal engendrant un moment d'inertie suffisamment grand. Le rôle du volant consiste à emmagasiner l'énergie pendant la course utile du piston et à la dépenser pendant toute la durée du fonctionnement du moteur pour surmonter toutes les résistances y compris celles que le moteur doit vaincre pendant les trois courses précédant la course utile.

L'énergie cinétique $J\frac{\omega^2}{2}$ du volant, où J est le moment d'inertie et ω, la vitesse angulaire du volant, peut être comparée à l'énergie potentielle Qh d'un liquide emmagasiné dans un réservoir, où Q est son poids et h, la hauteur du liquide dans ce réservoir. Si pendant la première des quatre secondes le réservoir se remplit, par exemple, d'une quantité égale à 0,01 Q de liquide avec une vitesse uniforme ou non uniforme quelconque et si pendant ces quatre secondes la même quantité de liquide s'écoule du réservoir également avec une vitesse uniforme ou non uniforme, alors, la variation de la hauteur du liquide dans ce réservoir ne sera pas supérieure à 0,01 Q. Par conséquent, l'énergie potentielle du liquide dans le réservoir ne diminuera pas de plus de 1%. D'une manière analogue, si pendant la durée de la course utile du piston, on communique au volant de l'énergie en quantité très inférieure à son énergie cinétique $J\frac{\omega^2}{2}$ et on dépense la même quantité pour la rotation de l'arbre principal durant les quatre courses du piston, alors l'énergie cinétique et, par conséquent, la vitesse angulaire du volant, varieront très peu.

Dans le projet d'un volant, les variations de la vitesse angulaire de l'arbre principal, durant un cycle, doivent rester dans des limites admissibles, qui dépendent de la désignation du moteur. Ces variations sont évaluées à l'aide du coefficient de non-uniformité qui est égal à

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{moy}},$$

où ω_{moy}, ω_{max} et ω_{min} sont respectivement les vitesses angulaires moyenne, maximale et minimale de l'arbre principal du moteur pendant un cycle.

En ce qui concerne l'uniformité de la course, les moteurs qui mettent en marche les génératrices de courant alternatif doivent satisfaire aux exigences les plus sévères : pour ces moteurs le coefficient de non-uniformité ne doit pas être pris supérieur à 1/200-1/300 et dans certains cas doit être très inférieur à ce chiffre (jusqu'à 1/1000).

Il découle de ce qui a été exposé que la vitesse de l'arbre principal s'égalise avec celle du volant pendant chaque cycle. Mais si la puissance dépensée par le volant pour vaincre les résistances commence à devenir supérieure à la quantité d'énergie engendrée par le volant pendant l'unité de temps ou inférieure à cette quantité, alors la vitesse angulaire du volant varie progressivement. Dans ce cas, le régulateur décrit précédemment, ou un régulateur de tout autre type, entre en action. Dans l'exemple donné ci-dessus, l'action du régulateur se manifeste sur la portion *ab* du diagramme (fig. 182) : en fonction du sens dans lequel les valeurs de la vitesse angulaire de l'arbre principal commencent à varier, la portion *ab* sera respectivement raccourcie ou allongée par le régulateur, c'est-à-dire qu'on enverra plus ou moins de combustible liquide dans le cylindre au début de la course utile du piston.

Le volant est un organe obligatoire non seulement pour les moteurs à pistons ; on installe des volants sur les machines-outils où les organes mobiles doivent surmonter de grandes résistances agissant par intermittence de la part des matériaux à traiter. Dans cette machine le volant ressemble à un réservoir recevant continûment et uniformément l'énergie du moteur et dont les portions sont dépensées de temps en temps.

41. DÉTERMINATION DES DIMENSIONS PRINCIPALES DU VOLANT D'UN MOTEUR

Les oscillations de la vitesse angulaire du volant durant un cycle sont dues principalement, comme on l'a montré ci-dessus, au fait que les lois de variation du moment de réduction des for-

ces motrices et du moment des résistances ne coïncident pas. Expliquons en détail les phénomènes qui ont lieu quand le mouvement est établi aussi que les considérations qui doivent nous guider pour déterminer les principales dimensions du volant (fig. 183).

Nous aurons en vue un moteur du type qu'on vient de décrire ci-dessus, c'est-à-dire un moteur Diesel à un cylindre à quatre temps pour lequel un cycle est composé de quatre courses du piston accomplies pendant les deux tours de la manivelle. Nous allons nous baser sur le diagramme indicateur de la fig. 182 en supposant que ce diagramme nous est donné quand le mouvement est établi et que le moteur fonctionne en pleine puissance.

Les ordonnées du diagramme expriment les pressions des gaz sur le piston pour différentes positions du piston. En multipliant l'ordonnée par l'aire du piston nous trouvons les forces avec lesquelles les gaz exercent une pression sur le piston. Suivant l'axe des abscisses du diagramme, on a porté les volumes des gaz qui se trouvent au-dessus du piston. En divisant les abscisses par l'aire du piston, nous trouvons les chemins parcourus par le piston de la position la plus haute à la position la plus basse et inversement. En agissant ainsi, nous ne modifions pas le diagramme, mais nous introduisons d'autres échelles sur les axes des abscisses et des ordonnées.

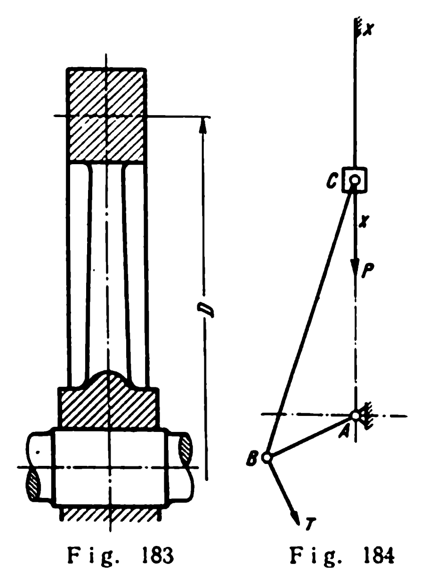


Fig. 183　　Fig. 184

Ayant recours au schéma du mécanisme manivelle-bielle (fig. 184) qui se trouve à la base du moteur en question, nous supposons que la force P, agissant de la part des gaz sur le piston (le coulisseau sur le schéma), agit au point C dans la direction parallèle à la glissière $x—x$. En concentrant cette force au point C, la bielle agit sur la manivelle au point B avec une certaine force dont la composante suivant la direction perpendiculaire à AB est l'effort tangentiel T engendrant le couple TR dans la manivelle, où R est la longueur de la manivelle.

En négligeant les pertes dues au frottement, on peut trouver la dépendance entre la force P et la force tangentielle T au point B de la manivelle, en exprimant la puissance instantanée du mo-

teur de la manière suivante

$$Pv_C = Tv_B,$$

d'où

$$T = P\frac{v_C}{v_B}.$$

Puisque les valeurs de la vitesse v_B varient seulement entre des limites très petites, par la suite, on pourra supposer la vitesse constante. La valeur de la force P pour différentes positions du point C sur sa trajectoire et pour différentes courses du piston peut être définie d'après le diagramme obtenu comme indiqué

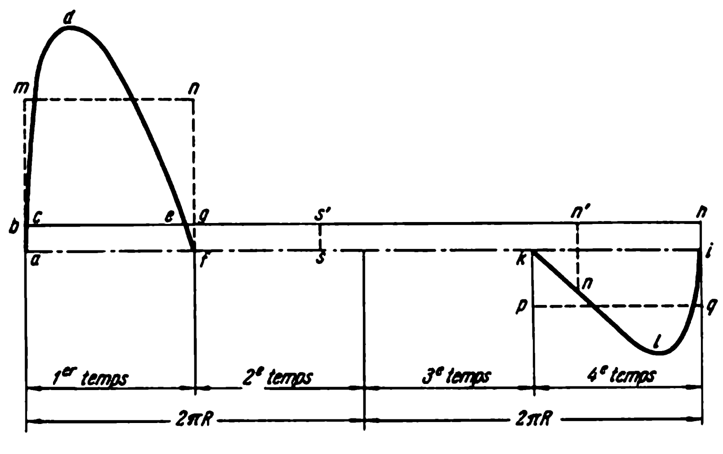


Fig. 185

précédemment. Les vitesses v_C pour différentes positions du point C sur sa trajectoire peuvent être déterminées d'après les plans des vitesses. Une représentation très précise de la variation de cette valeur est donnée par le diagramme cinématique qu'on trouve sur la fig. 53, *b*.

Les résistances insignifiantes que le piston doit vaincre pendant le deuxième et le troisième temps, c'est-à-dire pendant l'échappement des produits de la combustion et l'aspiration de l'air dans le cylindre, ne sont pas prises en considération.

Portons, suivant l'axe des abscisses (fig. 185), dans une direction quelconque, le chemin parcouru développé en ligne droite et passant par le point B pendant un cycle, c'est-à-dire pendant le temps nécessaire à quatre courses du piston ou ce qui revient au même, à deux tours de la manivelle. Portons suivant l'axe des coordonnées les valeurs des efforts tangentiels T définies de la manière indiquée ci-dessus.

Pendant la durée du premier temps, les valeurs des efforts tangentiels varient suivant la loi représentée par l'arc des courbes *adf*. L'aire limitée par cet arc de courbes (égale à l'aire du rectangle *amnf*) exprime la quantité d'énergie véhiculée vers la manivelle pendant le premier temps du fonctionnement du moteur.

Nous avons convenu de ne pas prendre en considération les résistances insignifiantes de la part des gaz pendant le deuxième et le troisième temps; le travail des résistances utile et nuisible, pour le moment, sera laissé de côté. Passons donc au point *k*, début du quatrième temps. Dès le commencement de ce temps, l'air injecté dans le cylindre pendant le troisième temps est comprimé. Puisque le déplacement du piston pendant le quatrième temps se fait au compte de l'énergie engendrée par le volant et comme pendant ce temps ce n'est pas la bielle qui met en rotation la manivelle, mais, au contraire, la manivelle qui met en mouvement la bielle, alors, les efforts tangentiels changent de signes; les efforts tangentiels varient suivant la loi qui correspond à l'arc des courbes *kli*. L'aire de cette courbe (égale à l'aire du rectangle *kpqi*) exprime la quantité d'énergie restituée par le volant à la source à partir de laquelle l'énergie lui était envoyée pendant le premier temps. Cette énergie restituée par le volant et renfermée dans l'air comprimé est complètement utilisée par le moteur pendant le premier temps du cycle suivant.

Il découle de ce qui a été exposé que pour le travail des résistances utiles et nuisibles on peut dépenser seulement la différence d'énergie exprimée par les aires des courbes *adf* et *kli*. Or, quand le mouvement est en régime permanent, la résistance rapportée au point *B* de la manivelle pendant la durée d'un cycle doit être considérée constante, alors, en divisant la différence des aires des courbes *adf* et *kli* par le chemin parcouru $4\pi R$ par le point *B* pendant un cycle, on trouve la valeur de l'ordonnée $ab = hi$ qui exprime la valeur de cette résistance. L'aire *abhia* exprime, par conséquent, le travail de la résistance.

Passons à présent à la vitesse angulaire du volant. Pendant le premier temps, les efforts tangentiels au point *B* de la bielle sur la manivelle sont de beaucoup supérieurs à la résistance produite par la manivelle; c'est pourquoi la vitesse angulaire de la manivelle et du volant augmente. L'augmentation de la vitesse angulaire cesse quand l'effort tangentiel devient égal à la résistance de la manivelle. Ceci se produit au point *e*, où la courbe *adf* et la droite *bh* se coupent. Par conséquent, en ce point la vitesse angulaire prend la valeur ω_{max}. Pendant les temps suivants, seules les actions de la résistance au mouvement agissent sur le piston non seulement jusqu'à la fin du quatrième temps, mais aussi jusqu'au début du premier temps, quand le point *B* a parcouru une portion

du chemin relativement petite et égale à *bc*. Par conséquent, au point *c* la vitesse angulaire est égale à ω_{min}.

L'augmentation de la vitesse angulaire du volant de ω_{min} jusqu'à ω_{max} se fait au compte de l'énergie communiquée au volant et exprimée par l'aire *cdec*. En désignant par *A* l'énergie exprimée par cette aire, on trouve

$$A=\frac{1}{2}\cdot J\left(\omega_{max}^2-\omega_{min}^2\right),$$

où *A* est en kgm, *J*—le moment d'inertie du volant en kgm/s² et ω—en s^{-1}.

En notant par δ le coefficient de non-uniformité qui est égal à

$$\delta=\frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_{moy}}\cdot$$

et en remarquant que

$$\omega_{moy}=\frac{\omega_{max}+\omega_{min}}{2},$$

on trouve

$$\omega_{max}=\omega_{moy}+\frac{\delta\cdot\omega_{moy}}{2},\qquad \omega_{min}=\omega_{moy}-\frac{\delta\cdot\omega_{moy}}{2}.$$

Après substitution, on a

$$A=J\cdot\omega_{moy}^2\cdot\delta=J\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2\delta=J\frac{n^2}{90}\delta,$$

où *n* est le nombre de tours par minute du volant relatif à la vitesse moyenne.

Le moment d'inertie du volant est

$$J=\frac{90\cdot A}{n^2\delta}.$$

En désignant le poids (en kg) du volant par *G* et en supposant que la masse $\frac{G}{g}$ du volant est uniformément répartie sur la circonférence du diamètre *D*, où $\frac{D}{2}$ est la distance de l'axe de rotation du volant au centre de gravité de la section transversale de la jante (voir fig. 183), on a

$$J=\frac{G}{g}\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{90\cdot A}{n^2\delta},$$

d'où

$$GD^2=\frac{4g\cdot 90\cdot A}{n^2\delta}\approx 3\,600\,\frac{A}{n^2\delta}.$$

Le produit CD^2 en kg·m² s'appelle moment tournant ou caractéristique du volant.

La grandeur nécessaire du moment tournant une fois déterminée, on définit le diamètre *D* du volant en s'appuyant sur des considérations constructives, puis, d'après ce diamètre, on détermine le poids.

En tenant compte du moment d'inertie des rayons reliant la jante à l'essieu, on se donne approximativement pour poids réel de la jante le poids donné par les calculs, diminué de 10%. Le poids total du volant, y compris le poids des rayons et de l'essieu, est de (1,25—1,35) *G*.

En augmentant le diamètre, on peut sensiblement diminuer le poids du volant tout en conservant la valeur du moment tournant du volant. Cependant en plus de considérations générales de construction, on doit encore avoir en vue qu'on ne peut pas dépasser la limite de la vitesse périphérique au-delà de laquelle il y a danger de rupture pour la jante sous l'action des forces centrifuges. En pratique, il est arrivé des cas où un morceau pesant de jante en se détachant du volant tournant à une grande vitesse a brisé l'installation de la construction en causant des victimes parmi les personnes attachées à la machine.

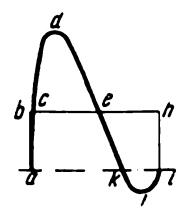


Fig. 186

Pour les volants en fonte ordinaire, la vitesse périphérique ne doit pas dépasser 30 m/s; pour les fontes de qualité supérieure, cette vitesse peut être prise un peu plus grande.

Dans les moteurs multicylindriques, les cycles énergétiques des différents cylindres sont décalés les uns par rapport aux autres; par exemple, dans un moteur à quatre cylindres et à quatre temps, les courses utiles pour les différents cylindres s'effectuent à tour de rôle. Pour ce moteur, le moment tournant est sensiblement inférieur: comme le premier temps dans un cylindre coïncide avec le quatrième temps d'un autre cylindre, l'action sur le volant pendant chaque demi-tour du vilebrequin se fait suivant la loi donnée sur la fig. 186 d'après la courbe *adkli*, dont les ordonnées sont les différences des ordonnées des courbes *adkf* et *kli* de la fig. 185. L'énergie exprimée par la différence des aires *adk* et *kli* est utilisée pour surmonter le travail de résistances, exprimé par l'aire *abhia*. La vitesse angulaire ω_{max} dans ce cas, de même que sur la fig. 186, est obtenue au point *e*, ω_{min} au point *c*. Quand on détermine le moment tournant d'après la formule donnée ci-dessus, il faut substituer le travail *A* exprimé par l'aire *cdec*, qui est sensiblement inférieure à l'aire indiquée sur la fig. 185 par les mêmes lettres. De plus, il faut prendre en considération qu'on obtient un moment tournant sensiblement plus petit malgré une puissance du moteur à quatre cylindres quatre fois supérieure.

Ci-dessus nous avons marqué les points du chemin parcouru par le point B en lesquels la vitesse angulaire du chaînon de réduction prend la plus grande et la plus petite valeur, mais nous n'avons pas étudié le problème relatif à la variation de la vitesse angulaire de la plus petite valeur à la plus grande. Cela s'explique facilement si l'on se rapporte au diagramme donné sur la fig. 185 et si on se base sur l'équation du mouvement du chaînon de réduction.

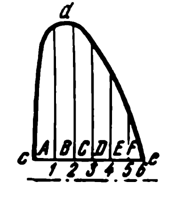


Fig. 187

Pour expliquer la loi suivant laquelle la vitesse angulaire croît de ω_{min} à ω_{max}, divisons la portion ce du chemin parcouru par le point B par les points 1, 2, . . . , 5 en parties égales et menons en ces points les perpendiculaires à ce afin de partager l'aire cde en aires A, B, C, . . . (fig. 187).

La vitesse angulaire ω_1 du point 1 est supérieure à ω_{min} grâce au travail des forces mobiles engendré par le volant et exprimé par l'aire A en kgm et, par suite, donc, on peut définir la vitesse angulaire à l'aide de l'équation

$$A=\frac{J}{2}(\omega_1^2-\omega_{min}^2).$$

La vitesse angulaire ω_2 du point 2 est définie à l'aide de l'équation

$$A+B=\frac{J}{2}(\omega_2^2-\omega_{min}^2),\ \text{etc.}$$

Du point e (fig. 185), la vitesse angulaire commence à décroître à partir de ω_{max} par suite de la dépense de l'énergie cinétique par le volant pour surmonter les résistances extérieures. La vitesse angulaire ω_s en un point quelconque s du chemin parcouru avant le début du quatrième temps se définit à l'aide de l'équation

$$\text{aire } fess'f=\frac{J}{2}(\omega_{max}^2-\omega_s^2).$$

La vitesse angulaire ω_n en un point quelconque n du chemin parcouru pendant le quatrième temps peut être définie à l'aide de l'équation

$$\text{aire } fen'nkf=\frac{J}{2}(\omega_{max}^2-\omega_n^2).$$

Après avoir ainsi déterminé les vitesses angulaires pour un nombre suffissamment grand de points du chemin parcouru par le point B, on peut construire une courbe régulière donnant une représentation très précise de la variation de la vitesse angulaire de la rotation du chaînon de réduction de ω_{min} à ω_{max} et inversement de ω_{max} à ω_{min}.

On donne sur la fig. 188 une courbe construite de la manière indiquée ci-dessus et avec emploi de l'équation du mouvement du chaînon de réduction.

Dans tous les exemples d'analyse cinématique et de calculs cinématico-statiques basés sur l'analyse cinématique des différents mécanismes donnés ci-dessus, la vitesse angulaire de la manivelle était supposée constante. Nous savons à présent que par vitesse angulaire constante on avait en vue la vitesse angulaire moyenne.

La construction du plan des accélérations pour toutes les positions de la manivelle débutait avec la construction du vecteur $\vec{a}_B=\vec{a}_B^n$, tandis que pour différentes positions de la manivelle il faut aussi prendre en considération

l'accélération tangentielle $\vec{a}_B^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB}$. Le diagramme donné sur la fig. 188 permet de préciser les plans des accélérations et les valeurs des forces d'inertie basées sur ces dernières.

Dans ce but, l'échelle des abscisses sur la fig. 188 doit être divisée par les rayons de rotation R du point B, ce qui permet d'exprimer l'angle de rotation φ du chaînon de réduction par les abscisses et la fonction $\omega = f(\varphi)$, par la courbe de la fig. 188. En différentiant la courbe $\omega = f(\varphi)$, nous trouvons les valeurs de $\frac{d\omega}{d\varphi}$; les accélérations angulaires s'obtiennent de la manière suivante:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega,$$

où ω est la vitesse angulaire de la position correspondante.

Si on prend en considération les vitesses angulaires du chaînon de réduction, alors il est nécessaire de reconstruire les plans des accélérations cons-

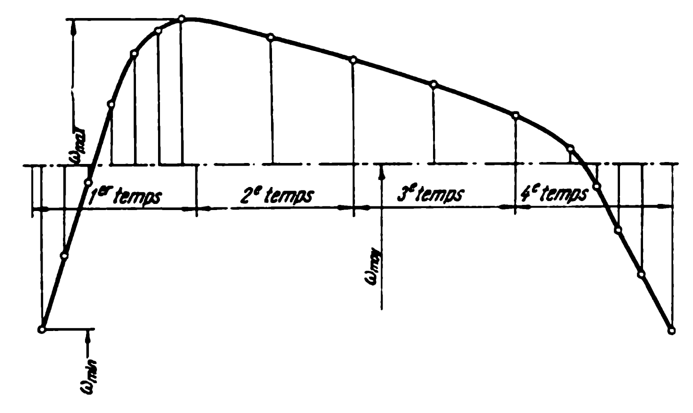


Fig. 188

truits à l'aide de ω_{moy} pour toutes les positions, mais les plans des vitesses peuvent rester intacts puisqu'on ne peut préciser que leur échelle.

Il faut prendre en considération la vitesse angulaire réelle et non la vitesse angulaire moyenne de la manivelle pendant la construction des plans des accélérations uniquement pour de grandes valeurs du coefficient δ de non-uniformité admissible de la course. Ceci se présente pour le cas des machines fonctionnant par chocs (presse, cisailles, etc.) lors du travail desquels la vitesse angulaire du chaînon menant décroît rapidement jusqu'au minimum pendant les courses utiles et croît rapidement jusqu'au maximum durant les marches à vide.

Sur la fig. 188, on a la courbe $\omega = f(\varphi)$ pour un moteur à combustion interne (Diesel à quatre temps). Pour ces moteurs, le coefficient δ n'est pas supérieur à 1/80 et s'ils sont déstinés à mettre en marche des génératrices de courant électrique, ce coefficient est alors sensiblement plus petit. La variation la plus rapide de la vitesse angulaire de la quantité $\omega_{moy} - \omega_{min} = \frac{\delta \cdot \omega_{moy}}{2}$ a lieu pendant la première moitié du tour du premier temps. Puisque la vitesse angulaire de cette portion varie suivant une loi linéaire (voir fig. 188), alors

l'accélération angulaire de cette portion peut être prise égale à

$$\varepsilon = \frac{\delta \cdot \omega_{moy}}{2} : \frac{30}{n} = \frac{\delta n \omega_{moy}}{60} \ s^{-2},$$

où n est le nombre de tours par minute de la manivelle et $\frac{30}{n}$ — l'intervalle de temps pendant lequel la vitesse angulaire varie.

Le rapport des valeurs de l'accélération normale à l'accélération tangentielle au point B du chaînon de réduction est, en cette portion, égal à

$$a_B^n : a_B^\tau = \omega_{moy}^2 \, l_{AB} : \frac{\delta n \omega_{moy}}{60} \, l_{AB} = \frac{60 \, \omega_{moy}}{\delta n} = \frac{60 \pi n}{30 \delta n} = \frac{2\pi}{\delta} .$$

Pour $\delta = 1/80$, le rapport est $a_B^n : a_B^\tau \approx 500$. Cela signifie que, si la longueur du vecteur a_B^n du plan des accélérations est égale à 100 mm, la longueur du vecteur a_B^τ est égale à 0,2 mm; pendant son analyse graphique, on aurait dû la prendre égale à zéro.

TABLE DES MATIÈRES